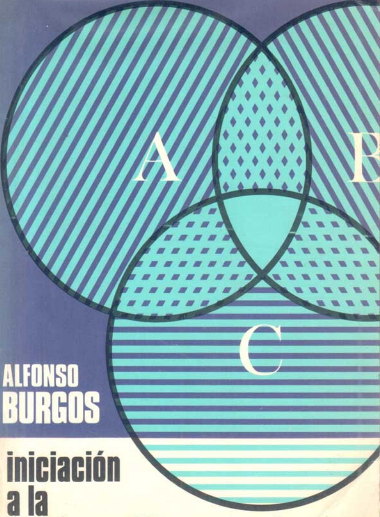


ALFONSO
BURGOS

iniciación a la matemática moderna

www.freelibros.org

iniciación a la matemática moderna

OTRA PUBLICACION DEL MISMO AUTOR

MATEMATICAS GENERALES

INDICE

Tomo I

CAP. I.—PROGRESIONES.
- § 1. Progresiones aritméticas.
- § 2. Progresiones geométricas.

CAP. II.—TEORIA COMBINATORIA.
- § 3. Variaciones.
- § 4. Permutaciones.
- § 5. Combinaciones.
- § 6. Potencia de un binomio.

CAP. III.—MATRICES.
- § 7. Matrices y determinantes.
- § 8. Desarrollo de los determinantes.
- § 9. Cálculo de la característica de una matriz.

CAP. IV.—ALGORITMO ALGEBRAICO.
- § 10. Expresiones algebraicas.
- § 11. Regla de Ruffini.

CAP. V.—ECUACIONES.
- § 12. Ecuaciones con una incógnita.

CAP. VI.—SISTEMAS DE ECUACIONES.
- § 13. Generalidades.
- § 14. Sistemas de ecuaciones lineales.

CAP. VII.—EL NUMERO REAL.
- § 15. Concepto de número real.
- § 16. Interpretación geométrica de los números reales.
- § 17. Sucesiones monótonas convergentes.
- § 18. Conjuntos.
- § 19. Límites de las sucesiones indefinidas de números reales.

CAP. VIII.—FUNCIONES DE UNA VARIABLE.
- § 20. El concepto de función.
- § 21. Trigonometría.

Tomo II

- § 22. La función lineal y la línea recta.
- § 23. Función exponencial.
- § 24. Función logarítmica.

CAP. IX.—LIMITES.
- § 25. Cálculo de límites.
- § 26. Cálculo de límites indeterminados.

CAP. X.—SERIES.
- § 27. Propiedades generales de las series.
- § 28. Series alternadas.
- § 29. Series de términos positivos.

CAP. XI.—EL NUMERO COMPLEJO.
- § 30. El concepto de número complejo.
- § 31. Operaciones en el campo de los números complejos.
- § 32. Potencias y logaritmos en el campo complejo.

CAP. XII.—ECUACIONES CUADRATICAS Y REDUCTIBLES A CUADRATICAS.
- § 33. Ecuaciones de segundo grado.
- § 34. Ecuaciones reductibles a cuadráticas.

iniciación a la matemática moderna

ALFONSO BURGOS
Profesor de las Universidades
Central de Venezuela y Católica Andrés Bello

SELECCIONES CIENTIFICAS
Avda. de Filipinas, 42
MADRID-3

Primera edición, 1969
Segunda edición, 1970
Tercera edición, 1971
Cuarta edición, 1972
Quinta edición, 1973
Sexta edición, 1974

© Alfonso Burgos

ISBN 84-85021-33-9

DEPÓSITO LEGAL: M. 3744.—1974

Printed in Spain. Impreso en España por Selecciones Gráficas,
Carretera de Irún, km. 11,500, Madrid.—1974.

A la memoria de mi hermano Juan, que despertó en mí el interés por la Matemática.

www.freelibros.org

presentación

Ha sido tan arrollador el avance de las Ciencias Aplicadas y tantas sus exigencias, que la Matemática se ha visto obligada a generar nuevos brotes que han hecho inoperantes las rígidas estructuras clásicas.

Las imperiosas necesidades actuales nos han hecho superar la época de la Matemática de artesanía, que se construía pieza a pieza.

Modernamente, las teorías matemáticas no son elementos inconexos entre sí, sino dúctiles cuadros legislativos, cuyas leyes se postulan y en los que se prescinde de la naturaleza de los entes que han de responder a ellas.

Se consigue así eliminar el laborioso proceso deductivo de las citadas leyes (propiedades) y, sobre todo al adoptarlas como axiomas, podremos construir deductivamente, al igual que se hace en la Geometría euclídea, un Algebra abstracta.

Además, como las conclusiones obtenidas a partir del cuadro de axiomas son válidas, con independencia de la naturaleza de los entes de partida, bastará fijar la naturaleza de dichos entes para tener un Algebra determinada. Un Algebra Abstracta dará lugar, pues, a tantas álgebras particulares como especificaciones distintas puedan adquirir los entes de partida.

Es la época de la Matemática Industrial; sería, por tanto, inútil y absurdo pretender oponerse a las nuevas tendencias.

Una de las Facultades donde más se está dejando sentir la necesidad de un cambio en los programas de Matemáticas es en la de Economía.

Temas como los de Conjuntos, Relaciones, Aplicaciones, Espacios Vectoriales, Cálculo Matricial, etc., son hoy de constante uso.

Es más, las publicaciones modernas sobre tópicos matemáticos, estadísticos o económicos utilizan notaciones y conceptos que resultan ininteligibles a los no iniciados en las actuales tendencias.

La presente publicación ha tenido su origen en un opúsculo que, con carácter de apuntes de clases, publiqué en el año 1966, bajo el título Elementos de Algebra Moderna. *La buena acogida dispensada por colegas y estudiantes a dichos apuntes me animó a estructurarlos mejor y, sobre todo, a completarlos con una bien seleccionada colección de problemas.*

En la redacción de esta obra he procurado siempre darle un carácter esencialmente pedagógico, de tal forma que he preferido recurrir al concepto intuitivo o al ejemplo antes que empeñarme en tratar rigurosamente ciertos puntos, que de por sí son demasiado abstrusos.

Teniendo en cuenta que el desarrollo teórico resulta a veces un tanto árido, he tenido sumo cuidado en colocar después de cada concepto y de cada conclusión el ejemplo o ejercicio aclaratorio adecuado para que aquéllos se graben en forma definitiva.

Finalmente, después de cada lección, y con el título de «Problemas resueltos», va una colección de problemas totalmente explicados. Se ha procurado que éstos sigan el orden que marca la lección; pero siempre con dificultad de resolución creciente. Al final, unos cuantos están intencionadamente desordenados.

A continuación, una colección similar a la anterior de «Problemas propuestos», con sólo la solución, completa la parte práctica del libro.

De esta forma hemos reunido en un solo tomo la teoría y el problemario correspondiente, con las ventajas económicas, y sobre todo pedagógicas, que ello representa para el alumnado.

Aproximadamente las dos terceras partes de los ejercicios están cuidadosamente seleccionados de alguna de las obras que figuran en la bibliografía. He creído más honesta esta conducta que la de cambiar la forma de los problemas tomados de otros libros, con la vana pretensión de que parezcan originales.

En la redacción de esta obra no me animó nunca la idea de *adornarme con «plumas ajenas», sino simplemente la de ayudar en la medida de mis fuerzas al lector estudioso.*

No pretende el presente volumen haber agotado ninguno de los temas tratados en él. Mi labor ha estado encaminada a presentar una visión orientadora de cada uno de ellos.

Tampoco he abordado todos los que hubiera querido, so pena de haber extendido demasiado la obra.

Del acierto de este trabajo corresponde juzgar al lector; pero sepa éste que sólo me anima un deseo: facilitar al estudiante el conocimiento de los Principios de la Matemática Moderna, «herramienta» que le permitirá profundizar en el estudio de las materias básicas para su formación profesional.

También me guía un propósito: contribuir, dentro de la modestia de este trabajo, a liberar a Venezuela del vasallaje, que salvo honrosas excepciones, se rinde a los libros extranjeros.

Daré por bien empleado mi esfuerzo si he contribuido con algo al acervo cultural de la nación.

Al final de esta obra, en la Bibliografía, se insertan los autores que han sido consultados y las obras de las cuales se han tomado ejercicios.

Sirvan estas líneas para expresar mi agradecimiento a los que, en una u otra forma, han colaborado en este trabajo.

En especial deseo nombrar a mis amigos y colegas de labores universitarias Rafael López Casuso, Francisco Zaera y Federico Prahl, por sus acertadas observaciones, al señor Juan Tamariz-Martel, por la revisión del manuscrito y sus sinceras reflexiones, y al señor Santiago Gallo, bajo cuya experta dirección se ha impreso esta obra.

A todos ellos mi agradecimiento más sincero.

A. BURGOS.

Caracas, 1969.

www.freelibros.org

1

conjuntos finitos e infinitos

1. Introducción

Uno de los conceptos más importantes de la Matemática moderna es el de *conjunto* o *clase* de objetos; es una idea primitiva y, por tanto, no se puede definir.

Ejemplos:

a) El conjunto de las hojas de este libro.

b) El conjunto de los alumnos que están inscritos en una Universidad determinada.

c) El conjunto de las butacas que hay en un teatro determinado.

d) El conjunto de los puntos de intersección de dos circunferencias dadas.

e) El conjunto de los números naturales.

f) El conjunto de los números pares.

g) El conjunto de los puntos de una circunferencia dada.

h) El conjunto de los puntos de un círculo dado.

i) El conjunto de los puntos de una esfera dada.

Los ejemplos anteriores nos ponen de manifiesto que los *elementos* que integran un conjunto pueden ser entes abstractos, tales como números, puntos, etc., o bien objetos materiales.

2. Determinación de un conjunto

Para *determinar* un conjunto hay dos métodos: por *extensión* y por *comprensión.*

Diremos que *un conjunto está determinado por extensión, cuando se ha enunciado cada uno de los elementos del conjunto.*

Es obvio que este método será aplicable solamente para determinar conjuntos poco numerosos; así se procede, por ejemplo, al pasar lista en clase.

Es evidente que si se trata de determinar un conjunto muy numeroso, como, por ejemplo, el conjunto de las aves que tiene el reino animal, el método por extensión se hace inadecuado. Es necesario, entonces, dar las características que son comunes a los objetos del conjunto y sólo a ellos.

Diremos que *un conjunto está determinado por comprensión cuando se da una propiedad o atributo que es común o pertenece a todos los elementos del conjunto y sólo a ellos.* Así, por ejemplo, el conjunto de los números pares es un conjunto que está determinado por comprensión, puesto que disponemos de una propiedad, la de ser divisibles por dos, que es común a los elementos del conjunto y sólo a ellos. Puesto que la determinación de un conjunto por comprensión incluye a la determinación por extensión, será aquélla, en general, la que adoptaremos para determinar conjuntos. Los conjuntos los designaremos con letras mayúsculas en carácter grueso: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ... En cambio, los objetos de un conjunto los representaremos con letras mayúsculas o minúsculas en carácter normal: A, B, C, ...; o bien: a, b, c, ...

Con la notación

$$\boldsymbol{A} \equiv \{M, N, P, \ldots, S\}$$

indicaremos que el conjunto $\boldsymbol{A}$ está integrado por los objetos M, N, P, ..., S.

Si el elemento M pertenece al conjunto $\boldsymbol{A}$, escribiremos:

$$M \in \boldsymbol{A}$$

y leeremos: M «*es un elemento de*» o «*pertenece a*» $\boldsymbol{A}$.

Si B no pertenece a A, se escribirá:

$$B \notin A$$

Ejercicio:

Si el conjunto A está constituido por los números 2, 4, 6 y 8, en virtud de las notaciones adoptadas, se podrá escribir:

$$A \equiv \{2, 4, 6, 8\}; \qquad 6 \in A; \qquad 5 \notin A$$

Cuando un conjunto A está integrado por un solo elemento x, escribimos $A \equiv \{x\}$; de esta forma ponemos de manifiesto la diferencia que hay entre el elemento x y el conjunto $\{x\}$.

Finalmente, el método por comprensión nos mueve a usar la notación siguiente para determinar un conjunto dado A.

$$A \equiv \{x | x \text{ es un objeto que verifica una condición dada}\}.$$

El segundo miembro lo leeremos así: «conjunto de todos los objetos x, cada uno de los cuales verifica una condición dada», o, en forma más breve: «conjunto de todos los x, tales que x es un objeto que verifica una condición dada».

Ejemplos:

a) $A \equiv \{x | x \text{ es un entero positivo menor que } 6\}$
En este caso hubiera sido más simple escribir:

$$A \equiv \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

b) $A \equiv \{x | x \text{ es un entero positivo par menor que } 1000\}$
Es evidente la ventaja de la notación empleada sobre la correspondiente al método por extensión.

c) $A \equiv \{x | x \text{ es un número racional comprendido entre } 0 \text{ y } 1\}$

d) $A \equiv \{x | x \text{ es un punto de un círculo dado}\}$

e) $A \equiv \{x | x \text{ es una raíz de } x^2 - 4x + 3 = 0\}$

f) $A \equiv \{x | x \in B \text{ y } x \in C\}$; B y C se suponen conjuntos dados.

Observaciones. *a)* Es importante hacer notar que los elementos de un conjunto deben ser distintos y que, por tanto, debe prescindirse de los objetos que se repiten. Según esto, los conjuntos: $\{a, b, b, b, c, c\}$ y $\{a, b, c\}$ son uno mismo.

b) También interesa señalar que por ahora prescindiremos del orden de colocación de los elementos de los conjuntos; por tanto, $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{3, 1, 4, 2\}$ son un mismo conjunto.

c) Por último, los elementos de un conjunto pueden, a su vez, ser conjuntos.

Así, por ejemplo, $\{\{a, b\}, \{c, d, e, f\}, \{g, h, i\}\}$ es un conjunto cuyos elementos son, a su vez, conjuntos.

Para representar algunos conjuntos particulares se usan letras determinadas, así, por ejemplo:

$\boldsymbol{N}^*$ para el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$;

$\boldsymbol{N}$ para el conjunto anterior completado con el cero, o sea, $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$;

$\boldsymbol{Z}$ para el conjunto de los números enteros $\{0, \pm 1, \pm 2 \pm 3, \dots\}$;

$\boldsymbol{Q}$ para el conjunto de los números racionales;

$\boldsymbol{Q}^+$ para el conjunto de los números racionales positivos;

$\boldsymbol{Q}^-$ para el conjunto de los números racionales negativos;

$\boldsymbol{R}$ para el conjunto de los números reales;

$\boldsymbol{R}^+$ para el conjunto de los números reales positivos;

$\boldsymbol{R}^-$ para el conjunto de los números reales negativos;

$\boldsymbol{C}$ para el conjunto de los números complejos.

3. Conjuntos iguales

Dos conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ diremos que son *iguales* si todo elemento de $\boldsymbol{A}$ pertenece a $\boldsymbol{B}$, e inversamente, todo elemento de $\boldsymbol{B}$ pertenece a $\boldsymbol{A}$.

Si los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son iguales escribiremos

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

y si no son iguales se escribe

$$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$$

Ejemplos:

a) $A \equiv \{x|x$ es un número entero positivo menor que $6\}$ y $B \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

b) $A \equiv \{x|x$ es raíz de la ecuación $x^2-5x+6=0\}$ y $B \equiv \{2, 3\}$;

c) $A \equiv \{x|x$ es triángulo equilátero$\}$ y $B \equiv \{x|x$ es triángulo equiángulo$\}$;

d) $A \equiv \{x|x$ es un punto perteneciente a una circunferencia de centro O y radio $R\}$ y $B \equiv \{x|x$ es un punto que dista R del punto $O\}$.

Los ejemplos anteriores son parejas de conjuntos iguales entre sí; en cambio, no son iguales los conjuntos:

e) $A \equiv \{1, 2, 3, 4\}$ y $B \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Propiedades. Tienen carácter de inmediata evidencia las propiedades siguientes:

(1)		$A=A$	Reflexiva.
(2)	Si	$A=B \Longrightarrow B=A$	Simétrica *.
(3)	Si	$A=B$ y $B=C \Longrightarrow A=C$	Transitiva.

4. Inclusión

Diremos que el conjunto A está *incluido* o *contenido* en el conjunto B, si todo elemento de A pertenece a B.

Diremos también que A es un *subconjunto* de B y escribimos:

$$A \subseteq B \quad \text{o} \quad B \supseteq A$$

Si $A \subseteq B$ y, además, existen elementos de B que no pertenecen a A, diremos entonces que A es un subconjunto *propio* de B y que la inclusión es *estricta* y escribiremos:

$$A \subset B$$

* El signo $\Longrightarrow$ tiene, según los casos, uno de los significados siguientes: «implica que», «se deduce que», o bien «se infiere que».

Ejemplos:

a) Si $A \equiv \{2, 4, 6\}$ y $B \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; el conjunto A está incluido o contenido estrictamente en el conjunto B, o lo que es lo mismo, A es un subconjunto propio de B.

b) El conjunto A, de todos los enteros múltiplos de 4, es un subconjunto propio del conjunto B, de todos los enteros múltiplos de 2.

c) El conjunto A de los puntos del segmento $M'N'$, es un subconjunto propio del conjunto B de los puntos del segmento MN (Fig. 1).

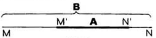


FIG. 1.

d) El conjunto A, de los puntos del círculo O_2, es un subconjunto propio del conjunto B, de los puntos del círculo O_1 (Fig. 2).

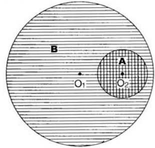


FIG. 2.

Propiedades de la inclusión. PROPIEDAD REFLEXIVA, es decir:

(1) $$A \subseteq A$$

En efecto, para todo $x \in A$ se tiene, por supuesto, $x \in A$.

PROPIEDAD ANTISIMÉTRICA, es decir:

(2) $$A \subseteq B \quad \text{y} \quad B \subseteq A \Longrightarrow A = B$$

En efecto:

$$A \subseteq B \Longrightarrow (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

y como:

$$B \subseteq A \Longrightarrow (x \in B \Longrightarrow x \in A)$$

se tendrá, en definitiva (3), $A = B$.

PROPIEDAD TRANSITIVA, es decir:

(3) $$A \subseteq B \quad \text{y} \quad B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$$

En efecto:

$$A \subseteq B \Longrightarrow (x \in A \Longrightarrow x \in B),$$

y como

$$B \subseteq C \Longrightarrow (x \in B \Longrightarrow x \in C),$$

tendremos, en definitiva, que todo

$$x \in A \Longrightarrow x \in C$$

y que, por tanto,

$$A \subseteq C.$$

Comparación de conjuntos. Dados los conjuntos A y B, si cabe afirmar:

$$A \subseteq B \quad \text{o bien} \quad B \subseteq A$$

diremos que los conjuntos A y B son *comparables;* es obvio que en caso contrario se diga que los conjuntos A y B *no son comparables.*

Si A no está incluido en B, escribiremos:

$$A \nsubseteq B$$

Ejemplos:

a) $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 3, 5\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

son conjuntos comparables.

En cambio:

b) $\boldsymbol{A} \equiv \{2, 4, 6\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{1, 3, 5, 7\}$

no son comparables.

5. Conjunto universal

Para definir un conjunto determinado $\boldsymbol{A}$ se debe suponer dado previamente un conjunto que lo contenga: el *género próximo* de la Lógica y al que nosotros llamaremos *conjunto universal* o *universo lógico;* lo representaremos con $\boldsymbol{U}$.

La *diferencia específica* en Lógica es el atributo o propiedad que es común a los elementos del conjunto y sólo a ellos.

Ejemplos:

a) Si $\boldsymbol{U}$ es el conjunto de todos los enteros, $\boldsymbol{A}$ puede ser el conjunto de todos los divisores comunes a los números 12 y 40.

b) Si $\boldsymbol{U}$ es el conjunto de todos los enteros, $\boldsymbol{A}$ puede ser el conjunto de todos los números pares.

c) Si $\boldsymbol{U}$ es el conjunto de todos los números reales, $\boldsymbol{A}$ puede ser el conjunto de todos los números racionales.

d) Si $\boldsymbol{U}$ es el conjunto de todos los puntos de una recta, $\boldsymbol{A}$ puede ser el conjunto de todos los puntos de un segmento de dicha recta.

e) Si $\boldsymbol{U}$ es el conjunto de todas las rectas del plano, $\boldsymbol{A}$ puede ser el conjunto de todas las rectas que pasan por un punto dado.

f) Si $\boldsymbol{U}$ es el conjunto de todos los polígonos de un plano, $\boldsymbol{A}$ puede ser el conjunto de todos los triángulos de dicho plano.

Los ejemplos anteriores nos ponen de manifiesto que, dado un conjunto universal $\boldsymbol{U}$, cada subconjunto $\boldsymbol{A}$ queda determinado por una cierta propiedad, que es común a los elementos de $\boldsymbol{A}$ y sólo a ellos.

Ahora bien, si la propiedad es válida universalmente, tal como $x=x$; el correspondiente subconjunto de $\boldsymbol{U}$ es el propio $\boldsymbol{U}$, por cuyo motivo:

Convendremos en incluir entre los subconjuntos de $\boldsymbol{U}$ *al propio* $\boldsymbol{U}$.

Por otra parte, si la propiedad fuera contradictoria en sí misma, tal como $x \neq x$; el correspondiente subconjunto no contendría ningún elemento. A este conjunto sin elementos le llamaremos *conjunto vacío* y lo representaremos con $\boldsymbol{O}$, $\varnothing$, o bien en la forma $\{\ \}$.

El conjunto vacío * está caracterizado, pues, por la propiedad de que, para todo elemento x, $x \notin \mathbf{O}$.

Ahora bien, si $\boldsymbol{A}$ es un subconjunto cualquiera de $\boldsymbol{U}$ y tenemos en cuenta que siempre $x \notin \boldsymbol{O}$; la implicación siguiente será verdadera **:

$$x \in \boldsymbol{O} \Longrightarrow x \in \boldsymbol{A},$$

esto es:

El conjunto vacío es un subconjunto de todos los conjuntos, es decir:

$$(1) \qquad \boldsymbol{O} \subseteq \boldsymbol{A}$$

Además, si $\mathbf{X}$ es un subconjunto del conjunto vacío, esto es: si $\mathbf{X} \subseteq \boldsymbol{O}$; puesto que también se tiene (1): $\boldsymbol{O} \subseteq \mathbf{X}$, de estas dos relaciones se sigue (4, 2.ª propiedad), que: $\mathbf{X}=\boldsymbol{O}$, es decir: *El único subconjunto del conjunto vacío es este.*

---

* A los no iniciados en la Lógica Formal se les aconseja no tratar de comprender la deducción de la relación (1); para éstos es preferible tomar dicha relación con carácter de *convenio*, es decir, sin demostración.

** *Iniciación a la Lógica Matemática*, por ALFONSO BURGOS, páginas 12 y 18.

Por otra parte, al ser $\boldsymbol{A}$ un subconjunto de $\boldsymbol{U}$, se tiene:

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{U} \tag{2}$$

De (1) y (2) se deduce:

$$\boldsymbol{O} \subseteq \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{U} \tag{3}$$

Relación válida para todo subconjunto $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{U}$ y que nos induce a llamar *cotas universales* a los conjuntos $\boldsymbol{O}$ y $\boldsymbol{U}$.

6. Conjunto de las partes

Dado un conjunto $\boldsymbol{A}$, se llama *conjunto de las partes* de $\boldsymbol{A}$ al que tiene como elementos a todos los subconjuntos de $\boldsymbol{A}$, incluso al conjunto vacío y al propio conjunto $\boldsymbol{A}$.

El conjunto de las partes de $\boldsymbol{A}$ lo representaremos con la notación $P(\boldsymbol{A})$.

Ejemplos:

a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1\}$, se tiene:

$$P(\boldsymbol{A}) \equiv \{\{\ \},\ \{1\}\}$$

b) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2\}$, se tiene:

$$P(\boldsymbol{A}) \equiv \{\{\ \},\ \{1\},\ \{2\},\ \{1, 2\}\}$$

c) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3\}$, se tiene:

$$P(\boldsymbol{A}) \equiv \{\{\ \},\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\},\ \{1, 2, 3\}\}$$

Obsérvese que el número de elementos de $P(\boldsymbol{A})$ en el último ejemplo es:

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = (1+1)^3 = 2^3$$

y, en general, si $\boldsymbol{A}$ tiene n elementos; $P(\boldsymbol{A})$ estará integrado por 2^n subconjuntos.

Es inmediato que si A es un conjunto infinito, $P(A)$ constará de infinitos elementos, esto es, de infinitos subconjuntos de A.

7. Conjuntos disyuntos

Se dice que dos conjuntos A y B son *disyuntos* si no tienen elementos comunes.

En cambio, llamaremos *solapados* a los conjuntos que, sin estar uno incluido en el otro, tienen elementos comunes.

Ejemplos:

a) Si $A \equiv \{1, 3, 5, 7\}$ y $B \equiv \{2, 4, 6\}$, A y B son disyuntos.

b) Si $A \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B \equiv \{5, 6, 7, 8\}$, A y B son solapados.

c) Si A es el conjunto de los números pares y B el de los impares, A y B son disyuntos.

d) Si A es el conjunto de los puntos del segmento MN y B es el conjunto de los puntos del segmento $M'N'$, A y B son disyuntos para la figura 1 y solapados para la figura 3.

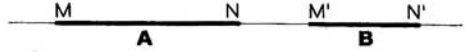


FIG. 1.

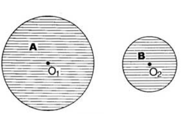


FIG. 2.

e) Si A y B son, respectivamente, los conjuntos de puntos de los círculos O_1 y O_2; A y B son disyuntos para la figura 2 y solapados para la figura 4.

FIG. 3.

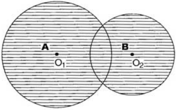


FIG. 4.

f) Si I es el conjunto de puntos del círculo O, C el conjunto de puntos de la circunferencia del círculo O y E es el conjunto de puntos exteriores a la circunferencia; los conjuntos I, C y E son, dos a dos, disyuntos (Fig. 5).

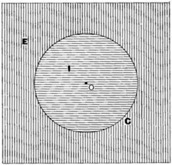


FIG. 5.

8. Partición

Llamaremos *partición* de un conjunto dado A a todo conjunto de subconjuntos no vacíos pertenecientes a A que, siendo disyuntos dos a dos, todo elemento de A pertenezca a uno de los subconjuntos.

Ejemplos:

a) Si A es el conjunto de los números naturales, una partición de A podría obtenerse incluyendo en un subconjunto los números impares y en el otro los pares.

b) Si A es el conjunto de los números reales, podríamos obtener una partición de A, descomponiendo éste en los subconjuntos siguientes: enteros positivos, el cero, enteros negativos, fraccionarios (no enteros) e irracionales.

c) Si A es el conjunto de los puntos de un plano y r una recta perteneciente a él, podríamos obtener una partición de A descomponiendo éste en los subconjuntos siguientes: conjunto de puntos de uno de los semiplanos que determina la recta, conjunto de puntos de r y conjunto de puntos del otro semiplano.

d) Si A es el conjunto de puntos de un plano y c una circunferencia de él, ésta da lugar a una partición de A en los subconjuntos siguientes: conjunto de puntos del círculo (es decir, interiores a la circunferencia), conjunto de puntos de la circunferencia y conjunto de puntos exteriores a la circunferencia.

e) La clasificación de los habitantes de un país por edades es una partición.

f) Las clasificaciones de la Historia Natural son también ejemplos de particiones.

Los subconjuntos de un conjunto particionado diremos que *cubren* éste.

Es de observar que los conjuntos de más de dos elementos admiten varias formas de partición. Así, por ejemplo, el conjunto $\{1, 2, 3\}$ se puede particionar en las formas siguientes:

$$\{\{1\}, \{2,3\}\}; \quad \{\{2\}, \{1,3\}\}; \quad \{\{3\}, \{1,2\}\};$$
$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

9. Diagramas de Venn

Con objeto de hacer más intuitivas las cuestiones relativas a conjuntos es aconsejable usar unos esquemas llamados *diagramas de Venn;* en ellos, los elementos del conjunto universal U se representan gráficamente por puntos de un cuadrado (o rectángulo) y los subconjuntos por puntos de círculos contenidos en el cuadrado.

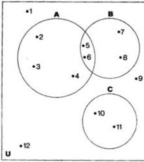
Es de observar que tanto U como los subconjuntos pueden ser finitos o infinitos y en este último caso puede incluso ser U el conjunto de todos los puntos del cuadrado y los subconjuntos estar integrados por todos los puntos de los círculos.

Interesa señalar también que, mientras no se advierta lo contrario, los elementos no los representaremos por puntos de los diferentes contornos (circunferencias y perímetro del cuadrado).

Ejemplo:

En la figura adjunta se ha representado en un diagrama de Venn, el conjunto universal

$$U \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$



y los subconjuntos

$$A \equiv \{2, 3, 4, 5, 6\}; \quad B \equiv \{5, 6, 7, 8\}; \quad C \equiv \{10, 11\}.$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Utilizando los métodos por extensión y por comprensión, determinar los conjuntos siguientes:

1. Conjunto de los números enteros positivos pares menores que 12.

Solución:

a) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$;
b) $\{x|x$ es un entero positivo par menor que $12\}$.

2. Conjunto de los divisores positivos de 20.

Solución:

a) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$;
b) $\{x|x$ es un divisor de $20\}$.

Determinar por extensión los conjuntos siguientes:

3. Conjunto de las fracciones de denominador 8 y cuyo numerador es un número entero positivo menor que 8.

Solución:

$$\left\{\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}\right\}$$

4. Conjunto de los números primos menores que 17.

Solución:

$$\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}.$$

Determinar por comprensión los conjuntos siguientes:

5. Conjunto de los números enteros positivos menores que 1000.

Solución:

$\{x|x$ es un número entero positivo menor que $1000\}$

6. Conjunto de las fracciones mayores que 1.

Solución:

$$\{x | x \text{ es una fracción mayor que } 1\}$$

7. Conjunto de todas las rectas de un plano π.

Solución:

$$\{x | x \text{ es una recta del plano } \pi\}$$

8. Conjunto de las raíces de la ecuación

$$x^4 - 3x^2 + 8x - 5 = 0$$

Solución:

$$\{x | x \text{ es una raíz de } x^4 - 3x^2 + 8x - 5 = 0\}$$

9. Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{1, 2, 3, 4\}$, determínense los conjuntos $\boldsymbol{B}$, tal que:

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{C}.$$

Solución:

$$\boldsymbol{B} \equiv \{1, 2, 3\} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B} \equiv \{1, 2, 4\}$$

10. Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4\}$, especifíquese los subconjuntos que contiene.

Solución:

$$\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$$
$$\{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$$

11. Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son subconjuntos disyuntos de $\boldsymbol{U}$, $m \in \boldsymbol{A}$ y $n \in \boldsymbol{B}$, se pregunta: *a)* ¿$m \in \boldsymbol{U}$?; *b)* ¿$n \in \boldsymbol{U}$?; *c)* ¿Existe algún elemento de $\boldsymbol{U}$ que pertenezca a $\boldsymbol{A}$, pero no a $\boldsymbol{B}$?; *d)* ¿Existe algún elemento de $\boldsymbol{U}$ que pertenezca a $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ simultáneamente?

Solución:

a) Sí; *b)* Sí; *c)* Sí; *d)* No.

12. ¿Cuál es el conjunto que contiene como máximo cuatro subconjuntos?

Solución:

Cualquier conjunto de dos elementos.

13. ¿Puede un conjunto contener como máximo siete subconjuntos?

Solución:

No.

14. Dados dos conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, ¿se tiene que verificar necesariamente $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ ó $\boldsymbol{A} \supseteq \boldsymbol{B}$?

Solución:

No, si los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no son comparables.

15. Ponga ejemplos de conjuntos no comparables.

Solución:

a) $\{1, 2, 3\}$; $\{5, 6, 7, 8, 9\}$;
b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; $\{4, 5, 6, 7\}$.

16. Ponga un ejemplo de conjuntos iguales.

Solución:

$\{1, 2, 3\}$;
$\{x | x$ es un número entero positivo menor que $4\}$.

17. Dar dos particiones diferentes de los conjuntos siguientes:

a) $\{x | x$ es un divisor de $24\}$;
b) $\{x | x$ es un punto del plano$\}$;
c) $\{x | x$ es un número natural$\}$;
d) $\{x | x$ es un habitante de Caracas$\}$;
e) $\{x | x$ es un estudiante de bachillerato de un Liceo determinado$\}$.

Soluciones:

a) 1.° $\{\{x | x$ es un divisor de $8\}$, $\{3, 6, 12, 24\}\}$, y
2.° $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{6, 8, 12, 24\}\}$.

b) 1.° Haz impropio de series rectilíneas, y
2.° Conjunto de subconjuntos de puntos determinados por una circunferencia dada.

c) 1.° $\{\{x | x$ es un número primo$\}$, $\{x | x$ es un número compuesto$\}\}$, y

2.° Conjunto de 4 subconjuntos de números naturales, cada uno de los cuales queda determinado porque divididos sus elementos por 4 dan por restos respectivos 0, 1, 2 y 3.

d) 1.° $\{\{x|x$ es varón con residencia en Caracas$\}$,
$\{x|x$ es mujer con residencia en Caracas$\}\}$, y

2.° Clasificación por edades.

e) 1.° Clasificación por cursos y un subconjunto extra en el que se incluyen los que llevan asignaturas de cursos diferentes, y

2.° Clasificación por edades.

18. Dados los conjuntos siguientes:

$$\boldsymbol{A} \equiv \{x|x \in \boldsymbol{N}^*\}, \quad \boldsymbol{B} \equiv \{x|x \in \boldsymbol{N}\}, \quad \boldsymbol{C} \equiv \{1, 2, 3\} \quad \text{y}$$
$$\boldsymbol{D} \equiv \{x|x \text{ es triángulo equilátero}\};$$

se pide expresar algunas de las relaciones de inclusión que existen entre esos conjuntos.

Solución:

$\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$; en cambio, $\boldsymbol{D}$ no es comparable con ninguno de los otros conjuntos.

19. Si el conjunto $\boldsymbol{A}$ no está incluido en el conjunto $\boldsymbol{B}$. ¿Qué relaciones son posibles entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$?

Solución:

1.° $\boldsymbol{A}$ no es comparable con $\boldsymbol{B}$, y

2.° $\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Utilizando los métodos por extensión y por comprensión, determinar los conjuntos siguientes:

   a) Conjunto de números naturales menores que 10.
   b) Conjunto de los estados de Venezuela.
   c) Conjunto de las raíces de la ecuación $x^2-12x+35=0$.
   d) Conjunto de los restos diferentes posibles que se pueden obtener al dividir por 8.
   e) Conjunto de letras de la palabra *letra.*

2. Leer los siguientes conjuntos:

   a) $\{x|x\in \boldsymbol{Z}\}$;
   b) $\{x|x\in \boldsymbol{N}$ y $x<6\}$;
   c) $\{x|x\in \boldsymbol{N}^*$ y $3\leqslant x\leqslant 8\}$;
   d) $\{1,2,3,4\}$;
   e) $\{x|x$ es recta de un plano dado$\}$;
   f) $\{x|x$ es raíz de la ecuación $x^2-10x+24=0\}$;
   g) $\{x|x\in\{1,2,3,4\}$ y $x\in\{2,4,6\}\}$;
   h) $\{x|x$ es venezolano y x es mayor de 60 años$\}$;
   i) $\{x|x$ es venezolano y x es varón$\}$.

3. Determinar por comprensión los conjuntos siguientes:

   a) Conjunto de los números enteros positivos mayores que 100.
   b) Conjunto de las fracciones positivas.
   c) Conjunto de todos los polígonos de un plano dado.
   d) Conjunto de todas las rectas del espacio.
   e) Conjunto de todos los venezolanos.
   f) Conjunto de todos los varones mayores de 80 años.
   g) Conjunto de todos los venezolanos mayores de 60 años, que tienen una estatura superior a 1,70 m y que tienen más de 5 nietos.
   h) Conjunto de todos los animales y de todos los vegetales.

4. Poner ejemplos de conjuntos iguales.

5. Dado el conjunto $A \equiv \{1, 2, 3\}$, se pide relacionar por inclusión todos los subconjuntos de A.

6. ¿Es cierto o falso que todo conjunto contiene, al menos, dos subconjuntos?

7. Ponga ejemplos de conjuntos no comparables.

8. ¿Cuántos subconjuntos pueden formarse con un conjunto de 4 elementos, y cuántos con uno de n elementos?

9. ¿Existen algunas relaciones de inclusión entre los conjuntos N, Z, C, N^*, R y Q? Exprésalas.

10. ¿Existe alguna relación de inclusión entre el conjunto de puntos de una circunferencia y entre el conjunto de puntos del círculo que ella determina?, ¿y entre el conjunto de puntos de la circunferencia y el conjunto de puntos de la figura formada por la circunferencia y su círculo.

11. ¿Son comparables por inclusión los conjuntos siguientes: $A \equiv \{x|x$ es mi hermano$\}$ y $B \equiv \{x|x$ es hermano de mi hermano Pepe$\}$?

12. ¿Son comparables por inclusión los conjuntos siguientes: $A \equiv \{x|x$ es múltiplo de $3\}$ y $B \equiv \{x|x$ es múltiplo de $6\}$. En caso afirmativo, especifique la relación de inclusión.

13. Los conjuntos de puntos limitados por dos circunferencias distintas, ¿cuándo serán comparables por inclusión, y cuándo no?

14. ¿Puede un conjunto contener como máximo un número impar de subconjuntos?

15. Ponga varios ejemplos de: *a)* conjuntos disyuntos, y *b)* conjuntos solapados.

16. El conjunto vacío O y un conjunto cualquiera, no vacío, A, ¿son disyuntos o solapados?

17. Una superficie esférica descompone al conjunto de puntos del espacio en tres subconjuntos: conjunto de puntos interiores a la superficie esférica, conjunto de puntos de ésta y conjunto de puntos exteriores a la repetida superficie esférica; esos tres subconjuntos, ¿cómo son entre sí: disyuntos o solapados?

18. El conjunto de alumnos de la Escuela de Economía de la Universidad Central de Venezuela está clasificado en cursos a efectos académicos. Si tenemos en cuenta que siempre hay alumnos que llevan materias pendientes, ¿cómo son entre sí los conjuntos de alumnos de dichos cursos: disyuntos o solapados?

19. Dar particiones diferentes de los conjuntos siguientes:

a) $\{x|x \in \boldsymbol{Q}\}$;
b) $\{0, 1, 2, 3\}$;
c) $\{x|x$ es divisor de $360\}$;
d) $\{x|x \in \boldsymbol{A}$ y $x \in \boldsymbol{B}\}$, siendo $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{3,4,5,6,7,8,9\}$;
e) $\{x|x$ es un punto de un plano dado$\}$;
f) $\{x|x$ es venezolano$\}$;
g) $\{x|x$ es alumno de la Universidad Central de Venezuela$\}$;
h) $\{x|x$ es una nación del mundo$\}$;
i) $\{x|x$ es un ser vivo$\}$.

20. ¿Se podría particionar el conjunto de todas las personas vivas del mundo en subconjuntos, cada uno de los cuales estuviera formado por: padres, madres e hijos?

21. ¿Se podría particionar el conjunto de todos los animales atendiendo a que tengan 2, 3 ó 4 patas?

22. ¿Se podría particionar el conjunto de los números naturales atendiendo a que los restos al dividir por 6 sean: 0, 1, 2, 3, 4 ó 5? ¿Y atendiendo a que al dividir por 4, los restos sean: 0, 1 ó 2?

23. Representar en un diagrama de Venn el conjunto universal $\boldsymbol{U} \equiv \{x|x$ es un número entero positivo menor que $14\}$ y los subconjuntos: $\boldsymbol{A} \equiv \{1,2,3,4,5,6,7\}$; $\boldsymbol{B} \equiv \{3,4,5,6,7,8,9\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{6,7,8,9,10,11\}$.

24. Si representamos en un diagrama de Venn el conjunto universal $\boldsymbol{U} \equiv \{x|x$ es venezolano$\}$ y, los subconjuntos $\boldsymbol{A} \equiv \{x|x$ es profesor$\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{x|x$ es médico$\}$, $\boldsymbol{C} \equiv \{x|x$ tiene automóvil$\}$ los representamos por conjuntos de puntos de círculos que se interceptan entre sí dos a dos; se pide expresar verbalmente los conjuntos de personas que corresponden a cada una de las ocho regiones en que ha quedado descompuesto el cuadrado.

2

operaciones con conjuntos

10. Intersección

I. Si A y B son dos subconjuntos cualesquiera del conjunto universal U, llamaremos *intersección* de A y B al conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B; la representaremos con la notación

$$A \cap B$$

y leeremos «intersección de los conjuntos A y B», o bien «A intersección B».

En símbolos:

$$A \cap B \equiv \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplos:

a) Si $A \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B \equiv \{2, 4, 6, 8, 10\}$, se tiene:

$$A \cap B \equiv \{2, 4, 6\}.$$

b) Si $A \equiv \{x | x \text{ es divisor de } 24\}$ y $B \equiv \{x | x \text{ es divisor de } 60\}$, se tiene:

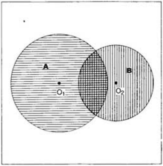
$$A \cap B \equiv \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

c) Si $A \equiv \{x | x \text{ es múltiplo de } 2\}$ y $B \equiv \{x | x \text{ es múltiplo de } 3\}$, se tiene:

$$A \cap B \equiv \{x | x \text{ es múltiplo de } 6\}$$

d) Si A y B son, respectivamente, los conjuntos de puntos de un círculo y una recta secante, $A \cap B$ es el conjunto de puntos de la cuerda que la secante determina en el círculo.

e) Si A y B son, respectivamente, los conjuntos de puntos de dos círculos secantes, $A \cap B$ es el conjunto de puntos que pertenecen simultáneamente a los dos círculos (parte doblemente rayada de la figura).



f) Si A es el conjunto de los matrimonios de un pueblo determinado que tienen un hijo y B el de los matrimonios que tienen un carro, $A \cap B$ es el conjunto de los matrimonios que tienen un hijo y un carro.

g) Si $A \equiv \{x|x \text{ es venezolano}\}$ y $B \equiv \{x|x \text{ es médico}\}$,

$$A \cap B \equiv \{x|x \text{ es médico venezolano}\}.$$

Por otra parte, como dado un conjunto universal U, cada subconjunto de él queda caracterizado por una cierta propiedad que es común a los elementos de dicho subconjunto, y sólo a ellos; si los subconjuntos son A y B y las propiedades que los caracterizan p y q, respectivamente; la intersección de dichos subconjuntos puede expresarse también en la forma:

$$A \cap B \equiv \{x|x \text{ posee las propiedades } p \text{ y } q\}.$$

II. Si los subconjuntos de $\boldsymbol{U}$ son tres o más, llamaremos *intersección* de ellos, al conjunto de los elementos de $\boldsymbol{U}$ que pertenecen simultáneamente a cada uno de los subconjuntos dados. Si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son los subconjuntos, la intersección de ellos se representa con la notación:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$$

y leeremos «intersección de los conjuntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$», o bien «$\boldsymbol{A}$ intersección $\boldsymbol{B}$ intersección $\boldsymbol{C}$».

En símbolos:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{A} \text{ y } x \in \boldsymbol{B} \text{ y } x \in \boldsymbol{C}\}.$$

En general, la intersección de la familia de subconjuntos de $\boldsymbol{U}$: $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n$, la representaremos con la notación

$$\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i$$

Ejemplos:

a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14\}$, se tiene:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} \equiv \{4, 5, 6\}$$

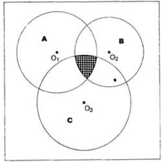
b) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{(x, y, z) | (x, y, z)$ es solución de $5x - 4y + 3z = 14\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{(x, y, z) | (x, y, z)$ es solución de $3x + 5y - 6z = 15\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{(x, y, z) | (x, y, z)$ es solución de $2x - 7y + 5z = -3\}$, la intersección de los tres conjuntos es el conjunto de subconjuntos (x, y, z), cada uno de los cuales verifica simultáneamente a las tres ecuaciones, esto es: la intersección es el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 5x - 4y + 3z = 14 \\ 3x + 5y - 6z = 15 \\ 2x - 7y + 5z = -3 \end{array}\right.$$

y como este sistema es compatible determinado, y su solución es (4, 3, 2), tendremos, en definitiva:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} \equiv \{(4, 3, 2)\}$$

c) Si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son, respectivamente, los conjuntos de puntos de tres círculos, cada uno de los cuales es interceptado por los otros dos (figura adjunta), $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$ *es el conjunto de puntos que pertenecen simultáneamente a los tres círculos* (parte cuadriculada de la figura).



d) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{x | x \text{ es venezolano}\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{x | x \text{ es señora casada}\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{x | x \text{ es mujer menor de 17 años}\}$,

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} \equiv \{x | x \textit{ es mujer venezolana casada menor de 17 años}\}.$$

e) Si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son tres conjuntos, dos a dos disyuntos, en virtud de la definición de intersección, se tiene:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$$

Propiedades de la intersección. 1.ª PROPIEDAD CONMUTATIVA, es decir:

(1) $$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}$$

En efecto:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{A} \text{ y } x \in \boldsymbol{B}\} = \{x | x \in \boldsymbol{B} \text{ y } x \in \boldsymbol{A}\} \equiv \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}$$

2.ª PROPIEDAD ASOCIATIVA, es decir:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{2}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &\equiv \{x | x \in (A \cap B) \text{ y } x \in C\} = \\ &= \{x | x \in A \text{ y } x \in B \text{ y } x \in C\} = \\ &= \{x | x \in A \text{ y } x \in (B \cap C)\} \equiv A \cap (B \cap C)\end{aligned}$$

Propiedades de la intersección y de la inclusión. 1.ª *Un conjunto está contenido en otros dos si, y sólo si* *, *está contenido en la intersección de ambos,* es decir:

$$X \subseteq A \ \text{ y } \ X \subseteq B \iff X \subseteq A \cap B \tag{3}$$

DIRECTO. Comenzaremos por probar que:

$$X \subseteq A \ \text{ y } \ X \subseteq B \implies X \subseteq A \cap B$$

En efecto, todo

$$x \in X \implies x \in A \quad \text{y} \quad x \in B \implies x \in A \cap B$$

Luego

$$X \subseteq A \cap B.$$

RECÍPROCO. Vamos a probar ahora que

$$X \subseteq A \cap B \implies X \subseteq A \ \text{ y } \ X \subseteq B$$

En efecto, todo:

$$x \in X \implies x \in A \cap B \implies x \in A \quad \text{y} \quad x \in B$$

---

* La frase «si, y sólo si» la emplearemos desde ahora en adelante para significar que es cierta la implicación directa y la recíproca de una proposición.

Luego:

$$X \subseteq A \quad \text{y} \quad X \subseteq B$$

2.ª *Un conjunto está contenido en otro si, y sólo si, la intersección de ambos es igual al primero de los conjuntos,* es decir:

(4) $$A \subseteq B \iff A \cap B = A. \quad \text{Conformidad.}$$

DIRECTO. Comenzaremos por probar que

$$A \subseteq B \implies A \cap B = A.$$

En efecto, todo:

$$x \in A \cap B \implies x \in A.$$

Inversamente, como $A \subseteq B$, todo

$$x \in A \implies x \in A \cap B.$$

Luego

$$A \cap B = A.$$

RECÍPROCO. Probaremos ahora que

$$A \cap B = A \implies A \subseteq B$$

En efecto, como de la hipótesis se sigue que $A = A \cap B$, todo

$$x \in A \implies x \in A \cap B.$$

Ahora bien, si

$$x \in A \cap B \implies x \in B$$

Luego

$$A \subseteq B$$

CONSECUENCIAS. Puesto que para todo conjunto A se tiene:

$$O \subseteq A, \quad A \subseteq A \quad \text{y} \quad A \subseteq U$$

en virtud de la segunda propiedad, se tendrán las siguientes nuevas propiedades:

(5) $$O \cap A = O$$

(6) $$A \cap A = A$$ Idempotencia

(7) $$A \cap U = A$$

Dejamos como ejercicio al lector la demostración de la siguiente propiedad:

(8) $$A \cap B = U \iff A = B = U$$

11. Reunión

I. Si A y B son dos subconjuntos cualesquiera del conjunto universal U, se llama reunión de A y B al conjunto de elementos de U que pertenecen a uno al menos de dichos conjuntos, es decir, a A o a B. Lo representaremos con la notación:

$$A \cup B$$

y leeremos «reunión de los conjuntos A y B» o, más brevemente, «A reunión B».

Observación. La expresión «A o a B» la tomaremos en el sentido alternativo corriente «A o B» y, además, en el de simultaneidad «A y B», es decir: el conjunto $A \cup B$ debe estar constituido por los tres subconjuntos siguientes: *a)* Subconjunto de elementos que pertenecen solamente a A; *b)* Subconjunto de elementos que pertenecen solamente a B, y, finalmente, *c)* Subconjunto de elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B; por tanto:

$$A \cup B \equiv \{x | x \in A \text{ ó } x \in B \text{ ó } x \in A \cap B\}$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta el sentido alternativo y de simultaneidad que hemos convenido atribuirle a la *o*, la fórmula anterior puede escribirse en la forma, más breve:

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \equiv \{x|x \in \boldsymbol{A} \text{ ó } x \in \boldsymbol{B}\}$$

Ejemplos:

a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{6, 7, 8\}$,

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \ \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}.$$

b) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{10, 12, 14, 16\}$,

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \equiv \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}.$$

c) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{2, 4, 6, 8\}$,

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

d) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son, respectivamente, los conjuntos de puntos de los círculos O_1 y O_2, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ es el conjunto integrado por los puntos de $\boldsymbol{A}$ y los de $\boldsymbol{B}$ (Fig. 1).

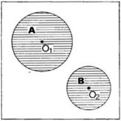


FIG. 1.

e) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son, respectivamente, los conjuntos de puntos de los círculos O_1 y O_2, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ está integrado por los subconjuntos siguientes: 1.°, el formado por los puntos que pertenecen solamente a $\boldsymbol{A}$; 2.°, el formado por los puntos que pertenecen solamente a $\boldsymbol{B}$, y 3.º, el formado por los puntos de $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, es decir, el formado por los puntos que pertenecen simultáneamente a $\boldsymbol{A}$ y a $\boldsymbol{B}$ (Fig. 2).

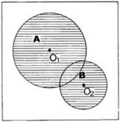


FIG. 2.

Por otra parte, dado el conjunto universal $\boldsymbol{U}$, si los subconjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ están caracterizados por las propiedades p y q, respectivamente, la reunión de dichos subconjuntos puede expresarse también en la forma:

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \equiv \{x | x \text{ posee la propiedad } p \text{ o la } q\}$$

Se habrá podido observar que cuando los conjuntos son finitos y disyuntos, la reunión coincide con la suma; no así cuando son finitos y solapados, o bien, son finitos y uno de ellos está incluido en el otro, y ello se debe a que hay elementos que pertenecen simultáneamente a ambos conjuntos; circunstancia que sabemos se excluye en la definición de suma.

Finalmente, como en los conjuntos solapados, y en los que uno de ellos está incluido en el otro, hay elementos que pertenecen simultáneamente a ambos conjuntos, es decir, elementos dobles, queda sobreentendido que cada uno de dichos elementos debe figurar como uno solo en la reunión.

II. Si los subconjuntos de $\boldsymbol{U}$ son tres o más, llamaremos *reunión* de ellos al conjunto de elementos de $\boldsymbol{U}$ que pertenecen a uno al menos de dichos conjuntos.

Si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son los subconjuntos, la reunión de ellos se representa con la notación:

$$A \cup B \cup C$$

y leeremos «reunión de los conjuntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$», o bien «$\boldsymbol{A}$ reunión $\boldsymbol{B}$ reunión $\boldsymbol{C}$». En símbolos:

$$A \cup B \cup C \equiv \{x | x \in A \text{ ó } x \in B \text{ ó } x \in C\}$$

queda sobreentendido que el conjunto $A \cup B \cup C$ está integrado por los subconjuntos siguientes: *a)* subconjunto de los elementos que pertenecen solamente a $\boldsymbol{A}$; *b)* subconjunto de los elementos que pertenecen solamente a $\boldsymbol{B}$; *c)* subconjunto de los elementos que pertenecen solamente a $\boldsymbol{C}$; *d)* Subconjunto de los elementos que pertenecen simultáneamente a $\boldsymbol{A}$ y a $\boldsymbol{B}$; *e)* subconjunto de los elementos que pertenecen simultáneamente a $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C}$; *f)* subconjunto de los elementos que pertenecen simultáneamente a $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$, y, finalmente, *g)* subconjunto de los elementos que pertenecen simultáneamente a $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ (figura 3). En general, la reunión de la familia de subconjuntos de $\boldsymbol{U}$: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, la representaremos con la notación:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Ejemplos:

a) Si $A \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B \equiv \{4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$ y $C \equiv \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, se tiene:

$$A \cup B \cup C \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

NOTA: Para aclarar conceptos se aconseja representar este ejemplo en un diagrama de Venn.

b) Si $A \equiv \{1, 2, 3\}$, $B \equiv \{5, 6, 7, 8\}$ y $C \equiv \{9, 10\}$, se tiene:

$$A \cup B \cup C \equiv \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Ilustrar este ejemplo con un diagrama de Venn.

c) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{1, 2, 3\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{5, 6, 7, 8\}$, se tiene:

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Ilustrar este ejemplo con un diagrama de Venn.

d) Si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son, respectivamente, los conjuntos de puntos de tres círculos, cada uno de los cuales es interceptado por los otros dos (figura adjunta), $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}$ *es el conjunto de puntos que pertenecen a uno, al menos, de los tres círculos* (parte rayada de la figura).

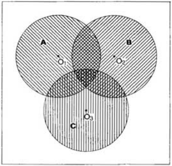


FIG. 3.

Obsérvese que la parte rayada de la figura se compone de: tres porciones simplemente rayadas, otras tres doblemente rayadas y, finalmente, una última porción triplemente rayada, que es precisamente la intersección de los tres conjuntos dados.

e) Si $A \equiv \{(x, y) \mid (x, y)$ es solución de $x^2+y^2-1<0\}$, $B \equiv \{(x, y) \mid (x, y)$ es solución de $x^2+y^2-1=0\}$, y $C \equiv \{(x, y) \mid (x, y)$ es solución de $x^2+y^2-1>0\}$, se tiene:

$A \cup B \cup C$ *es el conjunto de todos los puntos del plano.*

f) Si $\{A, B, C\}$ es una partición (8) del conjunto no vacío X, se tiene:

$$A \cup B \cup C = X$$

g) Si $A \cup B \cup C = X$, se tiene:

$$A \subseteq X, \quad B \subseteq X \quad \text{y} \quad C \subseteq X$$

esto es: *Cada subconjunto de una reunión está incluido en ésta.*

III. **Propiedades de la reunión.** 1.ª PROPIEDAD CONMUTATIVA, es decir:

$$A \cup B = B \cup A \tag{1}$$

En efecto:

$$A \cup B \equiv \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\} = $$
$$= \{x \mid x \in B \text{ ó } x \in A\} \equiv B \cup A$$

2.ª PROPIEDAD ASOCIATIVA, es decir:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{2}$$

En efecto:

$$(A \cup B) \cup C \equiv \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ ó } x \in C\} =$$
$$= \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B \text{ ó } x \in C\} =$$
$$= \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in (B \cup C)\} \equiv A \cup (B \cup C)$$

Ejercicio:

Comprobar la propiedad asociativa con un diagrama de Venn.

IV. **Propiedades de la reunión y de la inclusión.** 1.ª *Dos conjuntos están incluidos en otro si, y sólo si, la reunión de aquéllos está contenida en éste,* es decir:

(3) $$A \subseteq X \quad \text{y} \quad B \subseteq X \iff A \cup B \subseteq X$$

DIRECTO. Comenzaremos por probar que:

$$A \subseteq X \quad \text{y} \quad B \subseteq X \implies A \cup B \subseteq X$$

En efecto, por estar:

$$A \subseteq X \quad \text{y} \quad B \subseteq X,$$

todo

$$x \in A \cup B \implies x \in X.$$

Luego

$$A \cup B \subseteq X.$$

RECÍPROCO. Vamos a demostrar ahora que:

$$A \cup B \subseteq X \implies A \subseteq X \quad \text{y} \quad B \subseteq X$$

En efecto, todo

$$x \in A \implies x \in A \cup B \implies x \in X$$

Análogamente, todo

$$x \in \boldsymbol{B} \Longrightarrow x \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \Longrightarrow x \in \mathbf{X}$$

Luego

$$\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{X} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B} \subseteq \mathbf{X}$$

2.ª *Un conjunto está contenido en otro si, y sólo si, la reunión de ambos es igual al segundo de los conjuntos,* es decir:

(4) $$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$$ Conformidad.

DIRECTO. Comenzaremos por probar que:

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \Longrightarrow \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$$

En efecto, todo

$$x \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \Longrightarrow x \in \boldsymbol{A} \quad \text{ó} \quad x \in \boldsymbol{B}$$

Pero como $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, en todo caso

$$x \in \boldsymbol{B}$$

Inversamente, todo

$$x \in \boldsymbol{B} \Longrightarrow x \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$$

y, por tanto,

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$$

RECÍPROCO. Vamos a probar ahora que:

$$A \cup B = B \Longrightarrow A \subseteq B$$

En efecto, todo

$$x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow x \in B$$

Luego

$$A \subseteq B$$

CONSECUENCIAS. Puesto que para todo conjunto A se tiene:

$$O \subseteq A, \qquad A \subseteq A \quad \text{y} \quad A \subseteq U$$

en virtud de la propiedad (4) se tendrán las siguientes nuevas propiedades:

(5) $$O \cup A = A$$

(6) $$A \cup A = A$$ Idempotencia.

(7) $$A \cup U = U$$

Dejamos a cargo del lector la deducción de la siguiente propiedad

(8) $$A \cup B = O \Longleftrightarrow A = B = O$$

V. **Propiedades de la intersección y de la reunión.** DISTRIBUTIVIDAD:

(1) $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(2) $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Comenzaremos por demostrar la primera propiedad:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &\equiv \{x \mid x \in A \ \text{ y } \ x \in B \cup C\} = \\ &= \{x \mid x \in A \ \text{ y } \ (x \in B \text{ ó } x \in C)\} = \\ &= \{x \mid x \in A \ \text{ y } \ x \in B \text{ ó } x \in A \ \text{ y } \ x \in C\} = \\ &= \{x \mid x \in A \cap B \text{ ó } x \in A \cap C\} \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Vamos a demostrar ahora la segunda propiedad:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &\equiv \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B \cap C\} = \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ó } (x \in B \text{ y } x \in C)\} = \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B \text{ y } x \in A \text{ ó } x \in C\} = \\ &= \{x \mid x \in A \cup B \ \text{ y } \ x \in A \cup C\} \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Absorción:

(3) $\quad A \cap (A \cup B) = A \qquad\qquad$ (4) $\quad A \cup (A \cap B) = A$

Comenzaremos por demostrar la relación (3).

DIRECTO. Todo

$$x \in A \cap (A \cup B) \Longrightarrow x \in A \quad \text{y} \quad x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A$$

RECÍPROCO. Si

$$x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B,$$

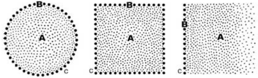
luego:

$$x \in A \cap (A \cup B).$$

Las relaciones (1) y (3) nos permiten probar fácilmente la certeza de la relación (4), pues, en efecto:

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B) = A.$$

VI. **Conjuntos abierto y cerrado.** Si c es una circunferencia dada y representamos con A al conjunto de puntos interiores a la circunferencia y con B al conjunto de puntos de c, diremos que A es un *círculo abierto*, que $C = A \cup B$ es un *círculo cerrado* y, finalmente, que B es la *frontera* del círculo cerrado C.



Desde ahora en adelante, y mientras no se advierta lo contrario, al referirnos al conjunto de puntos de un círculo queda sobreentendido que éste es abierto. Análogas definiciones para *cuadrados* y *semiplanos abierto* y *cerrado*, así como *frontera* de ambas figuras.

12. Complementación

I. Si A es un subconjunto del conjunto universal U, llamaremos *complemento* de A al conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen a A; lo representaremos con la notación A', o bien en la forma:

$$\underset{U}{\complement} A,$$

y leeremos «complemento de A con respecto a U».

En símbolos:

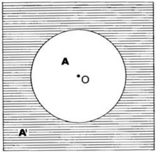
$$A' \equiv \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

Ejemplos:

a) Si U es el conjunto de los números naturales y A es el conjunto de los números pares, A' es el conjunto de los números impares.

b) Si U es el conjunto de los números reales y A es el conjunto de los números racionales, A' es el conjunto de los números irracionales.

c) Si U es el conjunto de los puntos de un cuadrado y A es el conjunto de los puntos de un círculo O, interior al cuadrado; A' es el conjunto de los puntos del cuadrado que no pertenecen al círculo (parte sombreada de la figura, incluida la circunferencia).



d) Si U y A son, respectivamente, los conjuntos de puntos de un plano y de una recta perteneciente a él, A' es el conjunto de los puntos del plano que no pertenecen a la recta.

e) Si U es el conjunto de los animales y A es el conjunto de los mamíferos, A' es el conjunto de los animales no mamíferos.

f) Si U es el conjunto de los habitantes de Caracas y A es el conjunto de los varones que habitan en Caracas, A' es el conjunto de las mujeres que habitan en Caracas.

Como dado un conjunto universal U, cada subconjunto A queda determinado por una cierta propiedad que es común a los elementos de A y sólo a ellos, tendremos:

II. Sea U un conjunto universal y p una propiedad tal que, para todo elemento x de U, se verifique: «x posee la propiedad p» o «x no posee la propiedad p». Ahora bien, como no poseer la propiedad p equivale a poseer la propiedad «no p», propiedad ésta que con frecuencia representaremos con la notación p'; si

$$A \equiv \{x|x \in U \text{ y } x \text{ posee la propiedad } p\}$$

se tendrá:

$$A' \equiv \{x|x \in U \text{ y } x \text{ posee la propiedad no } p\}$$

o bien,

$$A' \equiv \{x|x \in U \text{ y } x \text{ posee la propiedad } p'\}$$

Ejemplos:

a) Si U es el conjunto de los números naturales y A es el conjunto de los números de U que poseen la propiedad de ser primos, A' es el conjunto de los números de U que poseen la propiedad de ser «no primos».

b) Si U es el conjunto de todos los triángulos de un plano y A es el conjunto de todos los triángulos de U que poseen la propiedad de ser equiláteros, A' es el conjunto de todos los triángulos de U que poseen la propiedad de ser «no equiláteros».

c) Si U es el conjunto de todos los habitantes de Caracas y A es el conjunto de los habitantes de Caracas que poseen la propiedad de tener unos ingresos anuales superiores a 15.000 B^s, A' es el conjunto de los habitantes de Caracas que poseen la propiedad de tener unos ingresos anuales «no superiores» a 15.000 B^s.

III. Propiedades de la complementación

(1) $$A \cap A' = O \qquad A \cup A' = U$$

a) En efecto, si:

$$x \in (A \cap A') \Longrightarrow x \in A \quad \text{y} \quad x \in A',$$

es decir:

$$x \in A \quad \text{y} \quad x \notin A,$$

lo cual es absurdo.

Luego, ningún x pertenece al conjunto $A \cap A'$ y, por tanto,

$$A \cap A' = O.$$

b) Dejamos a cargo del lector la deducción de la segunda parte de la propiedad.

(2) $$O' = U \qquad U' = O$$

a) En efecto:

$$O' \equiv \{x | x \in U \text{ y } x \notin O\} \equiv U$$

b) Dejamos a cargo del lector la deducción de la segunda parte de la propiedad.

(3) $$(A')' = A \qquad \text{Involución.}$$

En efecto:

$$(A')' \equiv \{x | x \in U \text{ y } x \notin A'\} \equiv A$$

(4) $$A \subseteq B \Longleftrightarrow A' \supseteq B'$$

DIRECTO. Comenzaremos por probar que:

$$A \subseteq B \Longrightarrow A' \supseteq B'$$

En efecto, todo

$$x \in B' \Longrightarrow x \notin B,$$

pero como $B \supseteq A$,

$$x \notin B \Longrightarrow x \notin A \Longrightarrow x \in A'.$$

Luego

$$B' \subseteq A', \quad \text{o bien} \quad A' \supseteq B'.$$

RECÍPROCO. Vamos a probar ahora que:

$$A' \supseteq B' \Longrightarrow A \subseteq B$$

En efecto, todo

$$x \in A \Longrightarrow x \notin A',$$

pero como $A' \supseteq B'$,

$$x \notin A' \Longrightarrow x \notin B' \Longrightarrow x \in B.$$

Luego:

$$A \subseteq B.$$

LEYES DE MORGAN:

(5) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (6) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Demostraremos la (5), dejando la deducción de la (6) a cargo del lector.

$$\begin{aligned}(A \cap B)' &\equiv \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A \cap B\} = \\ &= \{x \mid x \in U \text{ y } (x \in A' \text{ ó } x \in B')\} = \\ &= \{x \mid x \in U \text{ y } x \in A' \cup B'\} \equiv A' \cup B'\end{aligned}$$

13. Ley de dualidad

Reuniendo en un cuadro las propiedades obtenidas en los números 4, 5, 10, 11 y 12, tenemos:

$$A \subseteq A$$

$$A \subseteq B \ \text{ y } \ B \subseteq A \Longrightarrow A = B$$

$$A \subseteq B \ \text{ y } \ B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$$

$$O \subseteq A \qquad U \supseteq A$$

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$\left.\begin{array}{l} X \subseteq A \ \text{ y } \ X \subseteq B \iff X \subseteq A \cap B \\ X \supseteq A \ \text{ y } \ X \supseteq B \iff X \supseteq A \cup B \end{array}\right\}$$

$$A \subseteq B \iff A \cap B = A \qquad A \supseteq B \iff A \cup B = A$$

$$O \cap A = O \qquad U \cup A = U$$

$$A \cap A = A \qquad A \cup A = A$$

$$A \cap U = A \qquad A \cup O = A$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\}$$

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap A' = O \qquad A \cup A' = U$$

$$O' = U \qquad U' = O$$

$$(A')' = A$$

$$A \subseteq B \iff A' \supseteq B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \qquad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

Ahora bien, a la vista de este cuadro de propiedades, es fácil comprobar que si en una de ellas se intercambian entre sí los signos

$$\subseteq \quad \text{y} \quad \supseteq$$
$$\cap \quad » \quad \cup$$
$$\boldsymbol{O} \quad » \quad \boldsymbol{U}$$

haciendo caso omiso del signo de complementación, caso de que éste figure en la propiedad, se obtiene de nuevo una de dichas propiedades, o bien se vuelve a obtener la misma propiedad de partida.

Esta notable propiedad, llamada *ley de dualidad,* nos señala la posibilidad de clasificar las propiedades vistas hasta ahora por parejas, o bien en *propiedades dobles,* entendiendo por propiedad doble aquella cuya dual sea la misma propiedad.

Las propiedades dobles son:

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \ \text{ y } \ \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \Longrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B},$$
$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \ \text{ y } \ \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C} \Longrightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C},$$
$$(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A} \ \text{ y } \ \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}' \supseteq \boldsymbol{B}'.$$

De la ley de dualidad se sigue que:

La validez de un teorema obtenido apoyándose en las repetidas propiedades implica la del dual correspondiente.

Así, por ejemplo, si hemos conseguido demostrar que

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A}' \cup \boldsymbol{B}') = \boldsymbol{U},$$

la certeza de esta propiedad implica la de su dual

$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}') = \boldsymbol{O}.$$

14. Algebra de conjuntos

En el desarrollo de la materia vista hasta ahora hemos comenzado por establecer los conceptos de «conjunto» y «elemento», para después proceder a definir diferentes operaciones y relaciones con ellos. Consecuencia de éstas y de la naturaleza lógica de los entes creados, se han ido deduciendo diferentes propiedades.

Las propiedades (o leyes) de los números 3, 4, 5, 10, 11 y 12 constituyen los «cuadros operacionales» o legislativos a que responden los entes preestablecidos y serán la base para el desarrollo de una teoría de conjuntos.

Ahora bien, es razonable pensar en la posibilidad de invertir el proceso inicial; es decir, comenzar por dar los cuadros legislativos (no deducirlos, sino postularlos) prescindiendo de la naturaleza de los entes que han de responder a ellos. Conseguiremos así eliminar el laborioso proceso deductivo de las citadas leyes; y, sobre todo, al adoptar como axiomas las repetidas propiedades, podremos construir deductivamente, al igual que se hace en la Geometría euclídea, un *Algebra de conjuntos.*

Es obvio que para la construcción axiomática de un Algebra de conjuntos debemos cerciorarnos de que los axiomas del cuadro de partida sean independientes entre sí; esto es, que ninguno de ellos pueda deducirse a partir de otros del cuadro inicial. Condición esta que, ciertamente, no se cumple con las leyes de los números 3, 4, 5, 10, 11 y 12, pues en repetidas ocasiones hemos visto cómo unas han sido deducidas lógicamente a partir de otras.

Es inmediato que nos preguntemos: ¿Cuál es el conjunto mínimo de axiomas que nos permitiría desarrollar axiomáticamente la repetida algebra de conjuntos?

Contrariamente a lo que se podría pensar, la cuestión es completamente indeterminada; pues hay en efecto tantas álgebras como cuadros de axiomas independientes entre sí podamos dar.

Es inmediato pensar que un álgebra será tanto más «perfecta» cuanto más completo sea el cuadro de axiomas de partida. Al estudiar el capítulo de las «Estructuras algebraicas» tendremos oportunidad de ver cómo, efectivamente, a medida que se va ampliando el cuadro legislativo (o cuadro de axiomas) se va obteniendo un álgebra cada vez más compleja.

Otras operaciones. Aun cuando para formar el cuadro operativo de cualquier álgebra de conjuntos basta con las operaciones definidas hasta ahora, vamos a estudiar dos nuevas operaciones que, si bien es verdad que pueden definirse a partir de las operaciones estudiadas hasta el momento, también es cierto que pueden definirse directamente, con lo que se consigue una mayor claridad.

15. Diferencia

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son dos conjuntos cualesquiera, llamaremos *diferencia* de dichos conjuntos al conjunto cuyos elementos pertenecen a $\boldsymbol{A}$, pero no a $\boldsymbol{B}$; la representaremos con la notación

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$$

En símbolos:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{A} \text{ y } x \notin \boldsymbol{B}\}$$

Ejemplos:

a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{2, 4, 5\}$, se tiene:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \equiv \{1, 3, 6\}$$

b) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{2, 4, 7, 8, 9\}$, se tiene:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \equiv \{1, 3, 5, 6\}$$

c) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{2, 4, 6\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{1, 3, 5, 7, 9\}$, se tiene:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \equiv \{2, 4, 6\}$$

d) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son, respectivamente, los conjuntos de puntos de los círculos O_1 y O_2 (Fig. 1), $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ es el conjunto de puntos de la parte sombreada.

e) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son, respectivamente, los conjuntos de puntos de los círculos solapados O_1 y O_2 (Fig. 2), $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ es el conjunto de puntos de la parte sombreada.

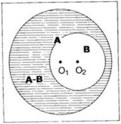


FIG. 1.

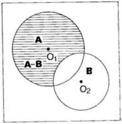


FIG. 2.

f) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son, respectivamente, los conjuntos de puntos de los círculos O_1 y O_2 (Fig. 3), $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ es el conjunto de puntos del círculo $\boldsymbol{A}$ (círculo sombreado).

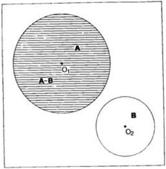


FIG. 3.

Es de observar que, si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son disyuntos:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$$

PROPIEDADES:

(1) $$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}'$$

En efecto:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\equiv\{x|x\in\boldsymbol{A} \text{ y } x\notin\boldsymbol{B}\}\equiv$$
$$\equiv\{x|x\in\boldsymbol{A} \text{ y } x\in\boldsymbol{B}'\}\equiv\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}'$$

La igualdad (1) nos pone de manifiesto la relación de dependencia que existe entre la nueva operación (diferencia) y las anteriores (intersección y complementación), señalándonos de paso la posibilidad de adoptar dicha igualdad (1) como definición de diferencia.

(2) $$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$$

En efecto:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{O}$$

(3) $$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$$

En efecto:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{O}'=\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}$$

(4) $$\boldsymbol{O}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$$

En efecto:

$$\boldsymbol{O}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\cap\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{O}$$

(5) $$\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$$

En efecto:

$$\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}'$$

(6) $$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}=\boldsymbol{O}$$

En efecto:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{U}'=\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$$

(7) $$(A-B)'=A'\cup B$$

En efecto:

$$(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup(B')'=A'\cup B$$

(8) $$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$ Morgan.

En efecto:

$$A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)'=A\cap(B'\cap C')\equiv$$
$$\equiv\{x|x\in A \text{ y } x\in B' \text{ y } x\in C'\}=$$
$$=\{x|x\in A \text{ y } x\notin B \text{ y } x\notin C\}=$$
$$=\{x|x\in A \text{ y } x\notin B\}$$

y

$$\{x|x\in A \text{ y } x\notin C\}=(A-B)\cap(A-C)$$

(9) $$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$ Morgan.

En efecto:

$$A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')=(A\cap B')\cup(A\cap C')=$$
$$=(A-B)\cup(A-C).$$

(10) $$A-B=B'-A'$$

En efecto:

$$A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'\cap(A')'=B'-A'$$

(11) $$(A-B)-C=A-(B\cup C)$$

En efecto:

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{C} \equiv \{x \mid x \in (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \quad \text{y} \quad x \notin \boldsymbol{C}\}=$$
$$=\{x \mid x \in \boldsymbol{A} \quad \text{y} \quad x \notin \boldsymbol{B} \quad \text{y} \quad x \notin \boldsymbol{C}\}=$$
$$=\{x \mid x \in \boldsymbol{A} \quad \text{y} \quad x \notin \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}\}=\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}).$$

(12) $$\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})$$

En efecto:

$$\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})'=\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B}' \cup \boldsymbol{C})=$$
$$=(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}') \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}).$$

(13) $$\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$$

En efecto:

$$\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})=\boldsymbol{O} \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})=\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$$

(14) $$\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})$$

En efecto:

$$\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}')=(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C}')=$$
$$=(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{C}' \cup \boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})'=$$
$$=(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}).$$

(15) $$\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})$$ *Distributiva.*

En efecto:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\cap(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})&=\boldsymbol{A}\cap(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}')=(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{C}'=\\ &=[(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{A}']\cup[(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{C}']=\\ &=(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cap(\boldsymbol{A}'\cup\boldsymbol{C}')=(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cap(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C})'=\\ &=(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C}).\end{aligned}$$

(16) $$\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}\iff\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$$

En efecto:

DIRECTO.

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\equiv\{x|x\in\boldsymbol{A}\ \text{y}\ x\notin\boldsymbol{B}\}\equiv\boldsymbol{O}$$

puesto que $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$.

RECÍPROCO. Si x es un elemento de $\boldsymbol{A}$, una de dos: ó $x\notin\boldsymbol{B}$, o bien $x\in\boldsymbol{B}$.

Ahora bien, como el primer caso no puede darse, ya que

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\equiv\{x|x\in\boldsymbol{A}\ \text{y}\ x\notin\boldsymbol{B}\}$$

es el conjunto vacío por hipótesis, tendrá que ser:

$$x\in\boldsymbol{A}\implies x\in\boldsymbol{B}$$

esto es:

$$\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}.$$

16. Suma booleana

Suma booleana o *diferencia simétrica* de dos conjuntos cualesquiera $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, es el conjunto $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ definido por la igualdad

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cup(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$$

Ejemplos:

a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{4, 5, 6, 7, 8\}$,

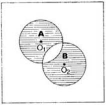
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \equiv \{1,2,3\} \cup \{6,7,8\} \equiv \{1,2,3,6,7,8\}$$

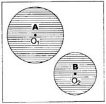
b) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{6, 7, 8\}$,

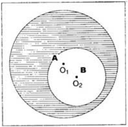
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \equiv \{1,2,3,4\} \cup \{6,7,8\} \equiv \{1,2,3,4,6,7,8\}$$

c) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{3, 4, 5\}$,

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \equiv \{1,2,6\} \cup \{\ \} \equiv \{1,2,6\}$$







d) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son, respectivamente, los conjuntos de puntos de los círculos O_1 y O_2 de las figuras adjuntas, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ es el conjunto de puntos de la parte sombreada de dichas figuras.

PROPIEDADES.

(1) $$A+B=A\cup B-A\cap B$$

En efecto:

$$\begin{aligned}A+B&=(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')=\\&=(A\cup B)\cap(A\cup A')\cap(B'\cup B)\cap(B'\cup A')=\\&=(A\cup B)\cap U\cap U\cap(A'\cup B')=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=\\&=(A\cup B)\cap(A\cap B)'=(A\cup B)-(A\cap B).\end{aligned}$$

(2) $$A+A=O$$

En efecto:

$$A+A=A\cup A-A\cap A=A-A=O$$

(3) $$A+O=A$$

En efecto:

$$A+O=A\cup O-A\cap O=A-O=A$$

(4) $$A+U=A'$$

En efecto:

$$A+U=A\cup U-A\cap U=U-A=A'$$

(5) $$(A+B)'=(A\cap B)\cup(A'\cap B')$$

En efecto:

$$\begin{aligned}(A+B)'&=[(A-B)\cup(B-A)]'=(A-B)'\cap(B-A)'=\\&=(A'\cup B)\cap(B'\cup A)=\\&=[(A'\cup B)\cap B']\cup[(A'\cup B)\cap A]=\\&=[(A'\cap B')\cup(B\cap B')]\cup[(A\cap A')\cup(A\cap B)]=\\&=[(A'\cap B')\cup O]\cup[O\cup(A\cap B)]=\\&=(A\cap B)\cup(A'\cap B').\end{aligned}$$

(6) $$A+B=B+A$$ *Conmutativa.*

En efecto:

$$A+B=A\cup B-A\cap B=B\cup A-B\cap A=B+A$$

(7) $$(A+B)+C=A+(B+C)$$ *Asociativa.*

En efecto:

$$\begin{aligned}(A+B)+C&=[(A+B)-C]\cup[C-(A+B)]=\\&=[(A+B)\cap C']\cup[(A+B)'\cap C]=\\&=\{[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\cap C'\}\cup\{[(A\cap B)\cup(A'\cap B')]\cap C\}=\\&=(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap B'\cap C).\end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned}&(A\cap B'\cap C')\cup(A\cap B\cap C)=\\&\quad=[A\cap(B'\cap C')]\cup[A\cap(B\cap C)]=\\&\quad=A\cap[(B'\cap C')\cup(B\cap C)]=\\&\quad=A\cap(B+C)';\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C)=\\&\quad=[A'\cap(B\cap C')]\cup[A'\cap(B'\cap C)]=\\&\quad=A'\cap[(B\cap C')\cup(B'\cap C)]=\\&\quad=A'\cap(B+C).\end{aligned}$$

Sustituyendo, se tiene:

$$\begin{aligned}(A+B)+C&=[A\cap(B+C)']\cup[A'\cap(B+C)]=\\&=[A-(B+C)]\cup[(B+C)-A]=A+(B+C).\end{aligned}$$

Distributividad de la intersección con respecto a la suma:

(8) $$A\cap(B+C)=(A\cap B)+(A\cap C)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}A\cap(B+C)&=A\cap[(B\cap C')\cup(B'\cap C)]=\\&=(A\cap B\cap C')\cup(A\cap B'\cap C).\end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C' &= (A \cap B \cap C') \cup O = \\ &= (A \cap B \cap C') \cup (A \cap A' \cap B) = \\ &= (A \cap B) \cap (A' \cup C') = (A \cap B) \cap (A \cap C)'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B' \cap C &= (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap A' \cap C) = \\ &= (A \cap C) \cap (A' \cup B') = (A \cap C) \cap (A \cap B)'. \end{aligned}$$

Sustituyendo, se tiene:

$$\begin{aligned} A \cap (B + C) &= [(A \cap B) \cap (A \cap C)'] \cup [(A \cap C) \cap (A \cap B)'] = \\ &= [(A \cap B) - (A \cap C)] \cup [(A \cap C) - (A \cap B)] = \\ &= (A \cap B) + (A \cap C). \end{aligned}$$

(9) $$A \cup (B + C) = A \cup B \cup C - A' \cap B \cap C$$

En efecto:

$$\begin{aligned} A \cup (B + C) &= A \cup [(B \cup C) - (B \cap C)] = A \cup (B \cup C) - \\ &- [(B \cap C) - A] = A \cup B \cup C - (B \cap C) \cap A' \end{aligned}$$

(10) $$(A + B) - C = (A \cap C') + (B \cap C')$$

En efecto:

$$(A + B) - C = (A + B) \cap C' = (A \cap C') + (B \cap C')$$

(11) $$A - (B + C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C')$$

En efecto:

$$\begin{aligned} A - (B + C) &= A \cap (B + C)' = A \cap [(B \cap C) \cup (B' \cap C')] = \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \end{aligned}$$

17. Número de elementos de un conjunto finito

Si el número de elementos de un conjunto finito cualquiera X lo representamos con la notación $n(X)$, es inmediato que: Si los conjuntos A y B son disyuntos, se tiene:

(1) $$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

En general, para h conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_h$, disyuntos entre sí dos a dos, se tiene:

(2) $$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_h) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_h)$$

Vamos ahora a generalizar las fórmulas obtenidas al caso de conjuntos cualesquiera (disyuntos o no).

I. Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, como

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')\,^*$$

y, además, los conjuntos $A \cap B$ y $A \cap B'$ son disyuntos, se tiene (1):

(3) $$n(A) = n(A \cap B) + n(A \cap B')$$

Análogamente, de

$$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

y teniendo en cuenta que $A \cap B$ y $A' \cap B$ son disyuntos, se tiene (1):

(4) $$n(B) = n(A \cap B) + n(A' \cap B)$$

Sumando miembro a miembro (3) y (4), tenemos:

$$n(A) + n(B) = 2n(A \cap B) + n(A \cap B') + n(A' \cap B)$$

de donde:

(5) $$n(A \cap B') + n(A' \cap B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

---

* $A = A \cap U = A \cap (B \cup B') = (A \cap B) \cup (A \cap B')$

Por otra parte, como

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)\ *$$

y, además, los conjuntos $A \cap B$, $A \cap B'$ y $A' \cap B$ son disyuntos dos a dos, se tiene (2):

$$n(A \cup B) = n(A \cap B) + n(A \cap B') + n(A' \cap B)$$

Sustituyendo $n(A \cap B') + n(A' \cap B)$ por su valor dado por (5), tenemos, en definitiva:

(6) $$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Es de observar que la fórmula obtenida es una generalización de la (1), pues, en efecto, si en la (6) introducimos la hipótesis de ser A y B disyuntos, se obtiene la (1).

II. Si partimos ahora de tres conjuntos cualesquiera A, B y C, se tiene:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C] = \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + \\ &\quad + n(C) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + \\ &\quad + n[(A \cap C) \cap (B \cap C)] = \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + \\ &\quad + n(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

es decir:

(7) $$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - \\ - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

---

* $A \cup B = [(A \cap B) \cup (A \cap B')] \cup [(A \cap B) \cup (A' \cap B)] =$
$= (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

III. Para cuatro conjuntos cualesquiera, A, B, C y D, se tiene:

$$
\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C \cup D) &= n[A \cup (B \cup C \cup D)] = \\
&= n(A) + n(B \cup C \cup D) - n[A \cap (B \cup C \cup D)] = \\
&= n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - \\
&\quad - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - \\
&\quad - n[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)] = \\
&= n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - \\
&\quad - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - \\
&\quad - [n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(A \cap D) - \\
&\quad - n(A \cap B \cap C) - n(A \cap B \cap D) - n(A \cap C \cap D) + \\
&\quad + n(A \cap B \cap C \cap D)]
\end{aligned}
$$

de donde:

$$
\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C \cup D) &= n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - \\
&\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - \\
&\quad - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + \\
&\quad + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + \\
&\quad + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - \\
&\quad - n(A \cap B \cap C \cap D).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Proponemos al lector, como ejercicio, la generalización de la fórmula obtenida al caso de que el número de conjuntos fuera n.

Ejemplos:

a) Si $A \equiv \{1, 2, 3\}$, $B \equiv \{4, 5, 6, 7\}$ y $C \equiv \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, se tiene:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) = 3 + 4 + 6 = 13$$

b) Si $A \equiv \{a, b, c, d\}$, $B \equiv \{b, c, d, e\}$ y $C \equiv \{a, b, e, f, g, h\}$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - \\
&\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = \\
&= 4 + 4 + 6 - 3 - 2 - 2 + 1 = 8
\end{aligned}
$$

Ejercicio:

¿Puede creerse a un investigador que informa que de cada 1000 habitantes de una ciudad, a 816 les gusta el azúcar, a 723 el helado, a 645 los pasteles, a 562 les gusta el azúcar y el helado, a 463 el azúcar y los pasteles, a 470 los pasteles y el helado y sólo a 310 les gustan las tres cosas?

Resolución:

Si representamos con $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$, respectivamente, a los conjuntos de personas que les gusta: el azúcar, el helado y los pasteles, se tiene: $n(\boldsymbol{A})=816$, $n(\boldsymbol{B})=723$, $n(\boldsymbol{C})=645$, $n(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})=562$, $n(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C})=463$, $n(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})=470$ y $n(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})=310$.

Aplicando la fórmula (17.7), tenemos:

$$\begin{aligned} n(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C}) &= n(\boldsymbol{A})+n(\boldsymbol{B})+n(\boldsymbol{C})- \\ &- n(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})-n(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C})-n(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})+n(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})= \\ &= 816+723+645-562-463-470+310=999. \end{aligned}$$

Resultado inferior al número de personas investigadas. Por tanto, no debe creerse al investigador.

18. Los cuantificadores

Si p es una propiedad determinada y $\boldsymbol{A}(p)$ el conjunto de elementos de $\boldsymbol{U}$ que poseen dicha propiedad; es decir, si

$$\boldsymbol{A}(p) \equiv \{x \mid x \in \boldsymbol{U} \text{ y } x \text{ posee la propiedad } p\}$$

Se pueden presentar dos casos, según sea

$$\boldsymbol{A}(p) \equiv \boldsymbol{U}, \quad \text{o bien} \quad \boldsymbol{A}(p) \not\equiv \boldsymbol{U}.$$

1.° $\boldsymbol{A}(p) \equiv \boldsymbol{U}$, es decir, todos los elementos de $\boldsymbol{U}$ poseen la propiedad p. Esto lo expresaremos escribiendo

$$(\forall\, x)\,(p)$$

y leeremos: «para todo x, se verifica la propiedad p».

Al símbolo $\forall\, x$ se le llama *cuantificador universal.*

Ejemplos:

a) Si U es el conjunto de los números reales, se tiene:

$$(\forall x)\,[(x+1)(x-1)=x^2-1]$$

b) Si U es el conjunto de los puntos de una circunferencia de centro o y radio r, se tiene:

$$(\forall x)\,(x \text{ dista } r \text{ de } o)$$

c) Si U es el conjunto de todos los triángulos del plano, se tiene:

$$(\forall x)\ (x \text{ es triángulo})$$

2.° Si $A(p) \neq U$ y suponemos, además, $A(p) \neq O$, un elemento de U, por lo menos, posee la propiedad p; esto lo expresaremos escribiendo

$$(\exists\, x)\,(p)$$

y leeremos, «existe un x, al menos, tal que x posee la propiedad p». Al símbolo $\exists\, x$ se le llama *cuantificador existencial.*

Ejemplos:

a) Si U es el conjunto de los números reales, se tiene:

$$(\exists\, x)\,(x^2-4x+3=0)$$

b) Si U es el conjunto de todos los triángulos del plano, se tiene:

$$(\exists\, x)\,(x \text{ es triángulo rectángulo})$$

c) Si U es el conjunto de todos los hombres de Caracas, se tiene:

$$(\exists\, x)\,(x \text{ es casado})$$

Es de observar que una propiedad que es verdadera para un cuantificador, se convierte en falsa para el otro; así, por ejemplo,

$$(\exists\, x)\,(x^2-5x+4=0)$$

es verdadera; en cambio,

$$(\forall\, x)\,(x^2-5x+4=0)$$

es falsa.

Interesa señalar, también, que hay propiedades que no se convierten ni en verdaderas ni en falsas para ninguno de los cuantificadores; así, por ejemplo,

$$(\exists\, x)\,(3x-2y+5=0) \quad \text{y} \quad (\forall\, x)\,(3x-2y+5=0)$$

no son ni verdaderas ni falsas.

En cambio, agregando los dos cuantificadores $\exists\, x$ y $\exists\, y$ se obtiene la propiedad verdadera

$$(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(3x-2y+5=0)$$

que se lee: «existe una pareja (x, y), al menos, que verifica $3x-$ $-2y+5=0$».

Análogamente, la propiedad

$$(\forall\, x)\,(\exists\, y)\,(x^{3y-4}=x^{y+2})$$

es verdadera y se lee: «para todo x, existe un y, al menos, tal que $x^{3y-4}=x^{y+2}$».

Para $f(x, y, z)=0$, y los cuantificadores $\forall\, x$, $\exists\, y$, $\forall\, z$, se tendría:

$$(\forall\, x)\,(\exists\, y)\,(\forall\, z)\,[f(x, y, z)=0]$$

que se lee en la forma: «para todo x existe un y, al menos, tal que, para todo z, se tiene $f(x, y, z)=0$».

Ejemplos:

a) $(\forall\, x)\,(\exists\, y)\,(\forall\, z)\,[(x+z)\,(x-z)\,(2y-3)=(x^2-z^2)y]$.

b) $(\forall\, x)\,(\exists\, y)\,(\forall\, z)\,[(x^z)^y=1]$.

Los cuantificadores y la negación. A veces interesa saber formar las negaciones de las propiedades que contienen cuantificadores. Se pueden presentar dos casos:

1.° Si no existe ningún elemento de U que posea la propiedad p, es decir, si $A(p)=O$, escribiremos

$$(\alpha) \qquad \text{no } (\exists\, x)\,(p)$$

Ahora bien, en este caso, el complementario de $A(p)$ sería el propio U, es decir, $[A(p)]'=U$, y como ningún elemento de U tiene la propiedad p, o lo que es lo mismo: todos los elementos de U poseen la propiedad *no p*, se tendrá:

$$(\beta) \qquad (\forall\, x)\,(\text{no } p)$$

Finalmente, como (α) y (β) expresan lo mismo, tendremos, en definitiva, la equivalencia

$$(1) \qquad \text{no } (\exists\, x)\,(p) \iff (\forall\, x)\,(\text{no } p)$$

2.° Si parte de los elementos de U poseen la propiedad p y los demás no la poseen, es decir, si parte de los elementos de U poseen la propiedad p, y los restantes la *no p*, se tendrá la equivalencia

$$(2) \qquad \text{no } (\forall\, x)\,(p) \iff (\exists\, x)\,(\text{no } p)$$

Ejemplos:

a) $\text{no}\,(\exists x)\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1=x\right) \iff (\forall x)\left[\text{no}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1=x\right)\right]$

b) $\text{no}\,(\forall\, x)\left(\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}\right) \iff (\exists\, x)\left[\text{no}\left(\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}\right)\right]$

Los cuantificadores y la conjunción. 1.° Si todos los elementos de U poseen simultáneamente las propiedades p y q, se tendrá la equivalencia

$$(3) \qquad (\forall\, x)\,(p \text{ y } q) \iff [(\forall\, x)\,(p) \text{ y } (\forall\, x)\,(q)]$$

y como, por otra parte,

$$(\forall\, x)\,(p \text{ y } q) \iff A(p \text{ y } q)=U$$

y, además,

$$A(p \text{ y } q) = B(p) \cap C(q)$$

tendrá que ser

$$(\forall x)(p \text{ y } q) \iff [A(p \text{ y } q) = U] \iff [B(p) = C(q) = U]$$

2.° Si existe algún elemento de U que posee simultáneamente las propiedades p y q y otros que no; es decir, si

$$A(p) \cap B(q) \not\equiv O \quad \text{y} \quad [A(p) \cap B(q)]' \not\equiv O$$

se tendrá la implicación

(4) $$(\exists x)(p \text{ y } q) \implies [(\exists x)(p) \text{ y } (\exists x)(q)]$$

La recíproca de esta implicación no será cierta, en general; en efecto:

$$(\exists x)(p) \text{ y } (\exists x)(q) \implies A(p) \neq O \text{ y } B(q) \neq O$$

pero si $A(p)$ y $B(q)$ fueran disyuntos, no existiría ningún elemento que posea simultáneamente las propiedades p y q y, por tanto,

$$\text{no}\,(\exists x)\,(p \text{ y } q)$$

Ejemplos:

a) Si $U \equiv \{6, 12, 18, 24\}$, se tiene:

$$(\forall x)(x = \dot{2} \text{ y } x = \dot{3}) \iff [(\forall x)(x = \dot{2}) \text{ y } (\forall x)(x = \dot{3})]\,*$$

b) Si $U \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15\}$, se tiene:

$$(\exists x)(x = \dot{2} \text{ y } x = \dot{3}) \implies [(\exists x)(x = \dot{2}) \text{ y } (\exists x)(x = \dot{3})]$$

En este ejemplo, la implicación recíproca es cierta.

---

* Con la notación $a = \dot{b}$ expresaremos que el número a es múltiplo de b.

c) Si $\boldsymbol{U} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 15\}$, se tiene:

$$(\exists\, x)(x = \dot{2}) \quad \text{y} \quad (\exists\, x)(x = \dot{3})$$

pero, en cambio, no es cierto que se tenga

$$(\exists\, x)(x = \dot{2} \text{ y } x = \dot{3}).$$

Los cuantificadores y la disyuntiva. 1.° Si existe algún elemento de $\boldsymbol{U}$ que posee la propiedad p o la q, o bien la p y la q simultáneamente, es decir, si

$$\boldsymbol{A}(p \text{ o } q) \neq \boldsymbol{O}$$

como en todo caso

$$\boldsymbol{A}(p \text{ o } q) = \boldsymbol{B}(p) \cup \boldsymbol{C}(q)$$

tendremos la equivalencia

$$\boldsymbol{A}(p \text{ o } q) \neq \boldsymbol{O} \iff \boldsymbol{B}(p) \cup \boldsymbol{C}(q) \neq \boldsymbol{O}$$

de donde

$$(5) \qquad (\exists\, x)(p \text{ o } q) \iff [(\exists\, x)(p) \text{ o } (\exists\, x)(q)]$$

2.° Si todos los elementos de $\boldsymbol{U}$ poseen la propiedad p, o todos poseen la propiedad q, se tendrá la implicación

$$(6) \qquad [(\forall\, x)(p) \text{ o } (\forall\, x)(q)] \implies (\forall\, x)(p \text{ o } q)$$

El recíproco es falso en general; en efecto:

$$(\forall\, x)(p \text{ o } q) \iff [\boldsymbol{A}(p) \cup \boldsymbol{B}(q) = \boldsymbol{U}]$$

Ahora bien, este segundo miembro no implica necesariamente que sea

$$\boldsymbol{A}(p) = \boldsymbol{U} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{B}(q) = \boldsymbol{U}$$

es decir, que se tenga

$$(\forall\, x)(p) \quad \text{o} \quad (\forall\, x)(q).$$

Ejemplos:

a) Si U es el conjunto de los puntos de un plano, $ABCDEF$ un exágono dado, p la propiedad de equidistar un punto del plano de los vértices A, B y C, y, finalmente, q la de equidistar de los vértices D, E y F, es inmediato que se tiene la equivalencia (5).

b) Si U es el conjunto de los puntos de la mediatriz de un segmento dado AB, p la propiedad de equidistancia de los puntos de U de los extremos A y B, y, finalmente, suponemos que q es una propiedad contradictoria en sí misma, como lo sería, por ejemplo, la de que la suma de distancias de los puntos de U a los A y B valiera $\dfrac{\overline{AB}}{2}$.

En este ejemplo es inmediata la implicación (6).

c) Si A, B y C son tres puntos no pertenecientes a una recta, U el conjunto integrado por los puntos de las mediatrices de AB y BC, p la propiedad de equidistar parte de los puntos de U de A y B, y, finalmente, q la de equidistar parte de los puntos de U de B y C.

En este caso, se tiene $(\forall x)$ (p o q), pero es falso que sea $(\forall x)(p)$ o $(\forall x)(q)$.

Los cuantificadores y la conmutatividad. Tienen carácter de inmediata evidencia las equivalencias.

(7) $$(\forall x)(\forall y)(p) \iff (\forall y)(\forall x)(p)$$

(8) $$(\exists x)(\exists y)(p) \iff (\exists y)(\exists x)(p)$$

por tanto, *los cuantificadores de la misma naturaleza se pueden cambiar entre sí.*

También es cierta la implicación

(9) $$(\exists x)(\forall y)(p) \Longrightarrow (\forall y)(\exists x)(p)$$

En cambio, la recíproca de ésta es falsa en general.

Ejemplo:

Si U es el conjunto de puntos de un plano, x e y, respectivamente, un punto y una curva cualesquiera del plano, y p la propiedad de poder ser engendrada y, de un solo trazo, por el movimiento de un punto x, se tiene, evidentemente, $(\forall\, y)(\exists\, x)(p)$, es decir, «cualquier curva y ha sido engendrada por el movimiento de un punto x».

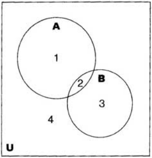
En cambio, si permutamos los cuantificadores, se tendría: $(\exists\, x)(\forall\, y)(p)$, es decir, «existe un punto x, tal que x ha engendrado todas las curvas y del plano», afirmación totalmente falsa.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si los elementos de los conjuntos solapados A y B los representamos por puntos de círculos solapados en un diagrama de Venn, y designamos con 1, 2, 3 y 4 las regiones que las circunferencias de dichos círculos determinan en U; se pide expresar simbólicamente dichas regiones.

Solución:

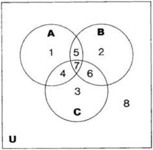
La región 1 viene expresada por $A \cap B'$, la 2 por $A \cap B$, la 3 por $A' \cap B$ y la 4 por $A' \cap B'$.



2. Si los conjuntos A, B y C son tales que los círculos que los representan en un diagrama de Venn se solapan dos a dos, se forman ocho regiones, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, cuya expresión simbólica se pide.

Solución:

La región 1 viene expresada por $A \cap B' \cap C'$, la 2 por $A' \cap B \cap C'$, la 3 por $A' \cap B' \cap C$, la 4 por $A \cap B' \cap C$, la 5 por $A \cap B \cap C'$, la 6 por $A' \cap B \cap C$, la 7 por $A \cap B \cap C$ y la 8 por $A' \cap B' \cap C'$.



NOTA: Puesto que el número de regiones que determinan las circunferencias de 1, 2 y 3 círculos es, respectivamente, 2, 4 y 8, es inmediato pensar que el número de regiones que determinan las circunferencias de n círculos, tales que tres cualesquiera de ellas no se corten en un punto y, además, que cada una corte a las $n-1$ restantes, es 2^n; la realidad es que esto es cierto solamente para $n=1$, 2 y 3, pero deja de verificarse desde $n=4$ en adelante.

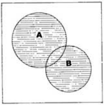
La fórmula general que da el número de regiones para n círculos es n^2-n+2 *.

3. Dados los conjuntos solapados A y B, se pide representar en un diagrama de Venn los conjuntos:

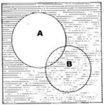
$$A \cup B, \quad A' \cup B, \quad A \cup B' \quad \text{y} \quad A' \cup B'$$

* La deducción puede verse en el libro *Norte de problemas*, de REY PASTOR y GALLEGO DÍAZ, núm. 24-4, páginas 184 y 185.

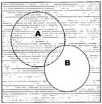
Solución:



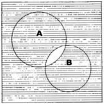
$A \cup B$



$A' \cup B$



$A \cup B'$



$A' \cup B'$

4. Si $\boldsymbol{U} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, determínense los conjuntos siguientes:

a) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$;	*f)* $\boldsymbol{A}' \cup \boldsymbol{B}$;	*k)* $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})'$;	*p)* $\boldsymbol{A}' \cup \boldsymbol{U}'$;
b) $\boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}$;	*g)* $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}'$;	*l)* $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})'$;	*q)* $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$;
c) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}'$;	*h)* $\boldsymbol{A}' \cup \boldsymbol{B}'$;	*m)* $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{U}$;	*r)* $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$;
d) $\boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}'$;	*i)* $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{O}$;	*n)* $\boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{U}'$;	*s)* $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.
e) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$;	*j)* $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{O}$;	*o)* $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{U}$;	

Solución:

a) $A \cap B \equiv \{3, 4\}$;

b) $A' \cap B \equiv \{5, 6, 7, 8\}$;

c) $A \cap B' \equiv \{1, 2\}$;

d) $A' \cap B' \equiv \{9\}$;

e) $A \cup B \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

f) $A' \cup B \equiv \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

g) $A \cup B' \equiv \{1, 2, 3, 4, 9\}$;

h) $A' \cup B' \equiv \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

i) $A \cap O \equiv O$;

j) $A \cup O \equiv \{1, 2, 3, 4\}$;

k) $(A \cap B)' \equiv \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

l) $(A \cup B)' \equiv \{9\}$;

m) $A \cap U \equiv \{1, 2, 3, 4\}$;

n) $A' \cap U' \equiv O$;

o) $A \cup U \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

p) $A' \cup U' \equiv \{5, 6, 7, 8, 9\}$;

q) $A - B \equiv \{1, 2\}$;

r) $B - A \equiv \{5, 6, 7, 8\}$;

s) $A + B \equiv \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$.

5. Si $U \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 9\}$, $B \equiv \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y $C \equiv \{3, 4, 5, 7, 9\}$. Se pide: 1.º, representar en un diagrama de Venn los conjuntos, y 2.º, determinar los conjuntos siguientes:

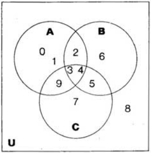
a) $A \cap (B \cap C)$; *d)* $A \cup (B \cup C)$; *g)* $A \cap (B + C)$;

b) $A \cap (B \cup C)$; *e)* $A \cap (B - C)$; *h)* $A \cup (B + C)$.

c) $A \cup (B \cap C)$; *f)* $A \cup (B - C)$;

Solución:

1.°



2.°

a) $A \cap (B \cap C) = \{3, 4\}$;

b) $A \cap (B \cup C) \equiv \{2, 3, 4, 9\}$;

c) $A \cup (B \cap C) \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9\}$;

d) $A \cup (B \cup C) \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$;

e) $A \cap (B - C) \equiv \{2\}$;

f) $A \cup (B - C) \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$;

g) $A \cap (B + C) \equiv \{2, 9\}$;

h) $A \cup (B + C) \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$.

6. Utilizando diagramas de Venn, verificar las relaciones:

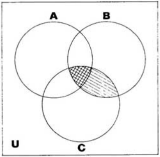
a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

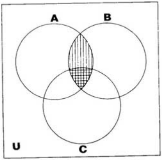
c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Solución: *a)*

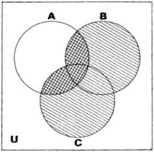


$A \cap (B \cap C)$ es la parte doblemente rayada.

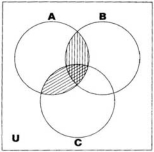


$(A \cap B) \cap C$ es la parte doblemente rayada.

b)

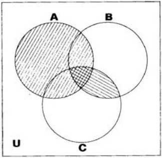


$A \cap (B \cup C)$ es la parte doblemente rayada.

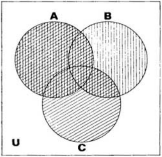


$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ es la parte rayada.

c)

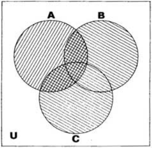


$A \cup (B \cap C)$ es la parte rayada.

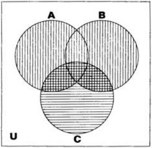


$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ es la parte doblemente rayada.

d)



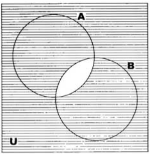
$A \cup (B \cup C)$ es la parte rayada.



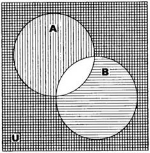
$(A \cup B) \cup C$ es la parte rayada.

7. Utilizando diagramas de Venn, verificar las leyes de Morgan.

Solución: *a)*

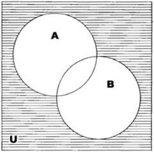


$(A \cap B)'$ es la parte rayada.

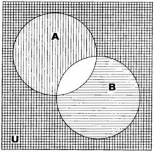


$A' \cup B'$ es la parte rayada.

b)



$(A \cup B)'$ es la parte rayada.

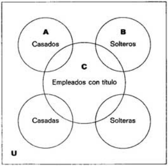


$A' \cup B'$ es la parte doblemente rayada.

8. Si $\boldsymbol{U}$ es el conjunto de los empleados de un ministerio, en el que supondremos no hay viudos-as ni divorciados-as, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$, respectivamente, los conjuntos de hombres casados, hombres solteros y empleados (hombres o mujeres) con título universitario. Se pide: 1.°, ilustrar gráficamente las relaciones entre los diversos conjuntos, y 2.°, expresar con palabras las combinaciones de signos siguientes:

a) $\boldsymbol{A}'$;	*b)* $\boldsymbol{B}'$;	*c)* $\boldsymbol{C}'$;
d) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$;	*e)* $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$;	*f)* $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}$;
g) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}$;	*h)* $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})'$;	*i)* $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})'$.

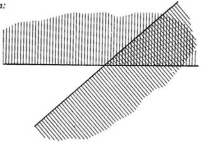
Solución: 1.°



2.° *a)* Conjunto de empleados solteros y casadas;
b) Conjunto de empleados casados y solteras;
c) Conjunto de empleados sin título;
d) Conjunto de empleados varones;
e) Conjunto vacío;
f) Conjunto de casados con título;
g) Conjunto de casados sin título;
h) Conjunto de empleados mujeres;
i) Conjunto integrado por empleados solteros, casadas y casados sin título.

9. Hallar gráficamente la intersección de los conjuntos de puntos de dos semiplanos solapados.

Solución:



La intersección es la parte doblemente rayada.

10. ¿En qué casos la intersección de dos semiplanos es el conjunto vacío?

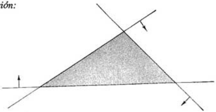
Solución:

a) Cuando los bordes de los semiplanos son coincidentes y los semiplanos distintos.

b) Cuando los bordes de los semiplanos son paralelos y los semiplanos disyuntos.

11. Hallar gráficamente el conjunto de puntos de un triángulo como intersección de los conjuntos de puntos de tres semiplanos.

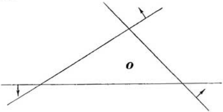
Solución:



La intersección de los tres semiplanos es la parte sombreada.

12. Hallar gráficamente un caso en que la intersección de los conjuntos de puntos de tres semiplanos no dé el conjunto de puntos de un triángulo.

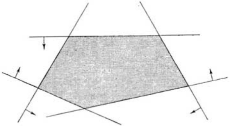
Solución:



La intersección en el caso indicado en la figura es el conjunto vacío.

13. Hallar gráficamente el conjunto de puntos de un pentágono como intersección de los conjuntos de puntos de cinco semiplanos.

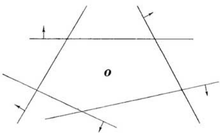
Solución:



La intersección de los cinco semiplanos es la parte sombreada.

14. Hallar gráficamente un caso en que la intersección de los conjuntos de puntos de cinco semiplanos no dé el conjunto de puntos de un pentágono.

Solución:



NOTA: La intersección, en el caso indicado en la figura, es el conjunto vacío.

15. Demostrar la igualdad

$$A \cap (B - A) = O.$$

Resolución:

$$A \cap (B - A) = A \cap (B \cap A') = (A \cap A') \cap B = O \cap B = O.$$

16. Demostrar que:

$$A \cup (B - A) \supseteq B$$

Resolución:

$$A \cup (B - A) = (A \cup B) - (A - A) = A \cup B \supseteq B.$$

17. Si $A \subseteq B$, demostrar que:

$$A - (A - B) = A.$$

Resolución:

$$A - (A - B) = A \cap B = A.$$

18. Hallar el resultado de las operaciones siguientes:

a) $B - (A \cap B)$;

b) $(A - B) \cup (B \cap A)$;

c) $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Resolución:

a) $B-(A\cap B)=(B-A)\cup(B-B)=B-A;$

b) $(A-B)\cup(B\cap A)=(A\cap B')\cup(A\cap B)=$
$=A\cap(B\cup B')=A\cap U=A;$

c) $(A\cap B)\cup(A\cap B')\cup(A'\cap B)=$
$=[(A\cap B)\cup(A\cap B')]\cup(A'\cap B)=$
$=[A\cap(B\cup B')]\cup(A'\cap B)=$
$=(A\cap U)\cup(A'\cap B)=A\cup(A'\cap B)=$
$=(A\cup A')\cap(A\cup B)=U\cap(A\cup B)=A\cup B.$

19. Demostrar las igualdades siguientes:

a) $(A\cap B)\cup(A'\cup B')=U;$

b) $(A\cup B)\cup(A'\cap B')=U;$

c) $(A\cap B')\cup(A'\cap B)=(A\cup B)\cap(A'\cup B');$

d) $(A\cap B)\cup(A+B)=A\cup B;$

e) $(A\cup B)\cap(A'\cup B')=A+B.$

Resolución:

a) $(A\cap B)\cup(A'\cup B')=(A\cap B)\cup(A\cap B)'=U;$

b) $(A\cup B)\cup(A'\cap B')=(A\cup B)\cup(A\cup B)'=U;$

c) $(A\cap B')\cup(A'\cap B)=[(A\cap B')\cup A']\cap[(A\cap B')\cup B]=$
$=[(A\cup A')\cap(A'\cup B')]\cap[(A\cup B)\cap(B\cup B')]=$
$=[U\cap(A'\cup B')]\cap[(A\cup B)\cap U]=$
$=(A'\cup B')\cap(A\cup B).$

d) $(A\cap B)\cup(A+B)=(A\cap B)\cup[(A\cup B)-(A\cap B)]=$
$=(A\cap B)\cup(A\cup B)-[(A\cap B)-(A\cap B)]=$
$=(A\cap B)\cup(A\cup B)=A\cup B.$

e) $(A\cup B)\cap(A'\cup B')=(A\cap B')\cup(A'\cap B)=$
$=(A-B)\cup(B-A)=A+B.$

20. Demostrar que

$$A+B\subseteq A\cup B.$$

Resolución:

$$x\in A+B \Longrightarrow x\in[(A\cup B)-(A\cap B)] \Longrightarrow$$
$$x\in A\cup B \quad \text{y} \quad x\notin A\cap B \Longrightarrow x\in A\cup B.$$

21. Demostrar las igualdades siguientes:

a) $(A \cup B) \cap (A+B) = A+B$;

b) $(A \cup B) \cup (A+B) = A \cup B$.

Resolución:

Son consecuencia inmediata de estar

$$A+B \subseteq A \cup B.$$

22. Demostrar que los conjuntos $A \cap B$ y $A+B$ son disyuntos.

Resolución:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap (A+B) &= (A \cap B) \cap [(A \cup B) - (A \cap B)] = \\ &= [(A \cap B) \cap (A \cup B)] - [(A \cap B) \cap (A \cap B)] = \\ &= A \cap B - A \cap B = O.\end{aligned}$$

23. Hallar el resultado de la expresión:

$$(A' \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B')$$

Resolución:

$$(A' \cap B) \cup (A \cap B') = (B-A) \cup (A-B) = B+A = A+B;$$
$$(A+B) \cup (A \cap B) = A \cup B;$$
$$(A \cup B) \cup (A' \cap B') = (A \cup B) \cup (A \cup B)' = U.$$

24. Demostrar que los subconjuntos A y B de U son complementarios si, y sólo si, se verifica simultáneamente:

$$A \cap B = O \quad \text{y} \quad A \cup B = U.$$

Resolución:

Si A y B son complementarios, es decir, si $B = A'$, se tendrá:

$$A \cap B = A \cap A' = O \quad \text{y} \quad A \cup B = A \cup A' = U$$

Recíprocamente:

$A \cap B = O \Longrightarrow A$ y B disyuntos

$A \cup B = U \Longrightarrow$ Todo $x \in U \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in A$ ó $x \in B$.

Por otra parte:

$$x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow x \in B \Longrightarrow A \subseteq B$$
$$x \in B \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow B \subseteq A$$

Ahora bien, como $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, tendremos, en definitiva:

$$A = B.$$

Recíproco:

$$A = B \Longrightarrow (A \cup B) \cap (A' \cup B') = (A \cup A) \cap (A' \cup A') = \\ = A \cap A' = O.$$

28. Demostrar la equivalencia

$$(A \cup B') \cap (B \cup A') = U \iff A = B$$

Resolución:

Basta observar que esta equivalencia es la dual de la del ejercicio 26.

29. Demostrar la equivalencia

$$(A \cap B) \cup (A' \cap B') = U \iff A = B$$

Resolución:

Obsérvese que esta equivalencia es la dual de la del ejercicio 27.

30. Demostrar la igualdad

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
&(A \cup B) \cap (B \cup C) = [(B \cup C) \cap A] \cup [(B \cup C) \cap B] = \\
&\quad = [A \cap (B \cup C)] \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup B = \\
&\quad = B \cup (B \cap A) \cup (A \cap C) = B \cup (A \cap C) \Longrightarrow \\
&\quad\quad (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = B \cup (A \cap C) \cap (C \cup A) = \\
&\quad = [(A \cap C) \cup B] \cap [(C \cup A) \cup (A \cap C)] = \\
&\quad = (A \cap C) \cup [B \cap (C \cup A)] = \\
&\quad = (A \cap C) \cup [(B \cap C) \cup (B \cap A)] = \\
&\quad = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).
\end{aligned}$$

31. Demostrar las igualdades

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B) \cap (A' \cup B') = O$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B') = U$$

Resolución:

Las igualdades anteriores se obtienen sin más que desarrollar los primeros miembros de las igualdades inmediatas:

$$(A \cap A') \cup (B \cap B') = O \quad \text{y} \quad (A \cup A') \cap (B \cup B') = U$$

NOTA: Obsérvese la dualidad de las igualdades a demostrar, así como, por supuesto, la de las últimas igualdades.

32. Demostrar la igualdad

$$(A \cup B) \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B') = A \cap B$$

Resolución:

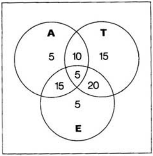
$$(A \cup B) \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup B = O \cup B = B \implies$$
$$\implies (A \cup B) \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B') =$$
$$= B \cap (A \cup B') = (B \cap A) \cup (B \cap B') =$$
$$= (A \cap B) \cup O = A \cap B.$$

33. Se consideran inmaduros para pasar a tercer año de la Escuela de Economía de cierta Universidad a los estudiantes que resulten aplazados en Análisis Matemático, Teoría Económica y Estadística de segundo año.

Si los resultados obtenidos en unos exámenes finales fueron: el 5% fueron aprobados en las tres asignaturas; el 20% fueron aprobados en Análisis y Estadística, por lo menos; el 15% fueron aprobados en Análisis y Teoría, por lo menos; el 25% fueron aprobados en Teoría y Estadística, por lo menos; el 35% fue el total de los aprobados en Análisis; el 50% fue el total de los aprobados en Teoría, y el 45% fue el total de los aprobados en Estadística.

Se desea saber cuántos alumnos tuvieron que repetir el segundo año.

Resolución:



Representaremos por puntos de un cuadrado (conjunto universal), el conjunto total de alumnos (el 100%), y por puntos de círculos solapados, indicados con las letras ***A***, ***T*** y ***E***, los conjuntos de alumnos que aprobaron Análisis, Teoría y Estadística, respectivamente.

Pondremos 5 en la parte común a los 3 círculos. Ahora bien, como sabemos que el tanto por ciento de los alumnos que aprobaron Análisis y Estadística es el 20 y ya hemos puesto 5, nos queda poner 15 en la parte común a ***A*** y ***E***, pero no a ***T***.

Análogamente, pondremos 10 en la parte común a ***A*** y ***T***, pero no a ***E***, y 20 en la parte común a ***E*** y ***T***, pero no a ***A***.

Finalmente, como el total de los aprobados en Análisis es de un 35%, nos falta poner un 5 en la parte de círculo ***A*** que no tiene puntos comunes con los otros dos círculos; un 15 en la parte de círculo ***T*** que no tiene puntos comunes con los otros dos y un 5 en la parte de círculo ***E*** que no tiene puntos comunes con los otros dos.

Y como la suma de los números escritos en los círculos es 75, tendremos, en definitiva, que el porcentaje de los estudiantes que tuvieron que repetir curso fue de un 25%.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $U \equiv \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $A \equiv \{c, d, e, f\}$ y $B \equiv \{e, f, g, h, i\}$, determínense los conjuntos siguientes:

$$A \cap B,\quad A' \cap B,\quad A \cap B',\quad A' \cap B',\quad (A \cap B)',\quad A \cap O,$$
$$A \cap U,\quad A \cup B,\quad A' \cup B,\quad A \cup B',\quad A' \cup B',\quad (A \cup B)',$$
$$A \cup O,\quad A \cup U,\quad A - B,\quad B - A,\quad A + B.$$

2. Si $U \equiv \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$, $A \equiv \{b, c, d, e, f, g\}$, $B \equiv \{e, f, h, i\}$ y $C \equiv \{f, g, i, j, k\}$, determínense los conjuntos siguientes:

$$A \cap B \cap C,\qquad A \cap (B \cup C).$$
$$A \cap (B - C),\qquad A \cap (B + C),$$
$$A \cup B \cup C,\qquad A \cup (B \cap C),$$
$$A \cup (B - C),\qquad A \cup (B + C).$$

3. Si $U \equiv \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q, r, s\}$, $A \equiv \{b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $B \equiv \{f, g, h, i, j, k, l, m\}$, $C \equiv \{e, f, i, l, m, n, p, q\}$ y $D \equiv \{d, e, f, g, m, n, p, r\}$.

Se pide: 1.°, representar en un diagrama de Venn los conjuntos, y 2.°, determinar los conjuntos siguientes:

$$(A \cup B) \cap (C \cap D),\qquad (A \cap B) \cap (C \cap D),$$
$$(A \cap B) - (C \cap D),\qquad (A \cap B) + (C \cap D),$$
$$[A \cap (B \cup C)] - D,\qquad [A \cup (B \cap C)] + D,$$
$$A \cup [(B - C) + D],\qquad A \cap [(B + C) - D],$$
$$A - [B \cup (C + D)],\qquad A + [B \cap (C - D)].$$

4. Utilizando los diagramas de Venn, verificar las igualdades siguientes:

$$A - B = A \cap B',$$
$$(A - B)' = A' \cup B,$$

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C),$$
$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C),$$
$$A-B=B'-A',$$
$$A-(A-B)=A\cap B,$$
$$A\cup(B-C)=(A\cup B)-(C-A),$$
$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C),$$
$$A+B=A\cup B-A\cap B,$$
$$(A+B)'=(A\cap B)\cup(A'\cap B'),$$
$$A\cup(B+C)=A\cup B\cup C-A'\cap B\cap C,$$
$$A\cap(B+C)=[(A\cap B)\cup(A\cap C)]-A\cap B\cap C,$$
$$A-(B+C)=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C'),$$
$$(A+B)-C=[(A\cap C')\cup(B\cap C')]-A\cap B\cap C',$$
$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

5. Demostrar que
$$A\cup B=A\cap B$$
si, y sólo si,
$$A=B.$$

6. Demostrar que
$$(A\cup B)\cap B'=A$$
si, y sólo si,
$$A\cap B=O.$$

7. Demostrar que
$$A\cap B'=A$$
si, y sólo si,
$$A\cap B=O.$$

8. Demostrar que
$$(A\cap B)\cup(A'\cap B')=(A\cup B')\cap(A'\cup B).$$

9. Demostrar la equivalencia
$$(A\cap B')\cup(A'\cap B)=A\cup B \iff A\cap B=O.$$

10. Demostrar la equivalencia:

$$(A \cap B') \cup (B \cap C') = O \iff A \subseteq B \subseteq C.$$

11. Demostrar la equivalencia:

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) = B \iff A = O.$$

12. Demostrar la igualdad:

$$(A \cup B) \cup [A \cap (B \cup C)] = A \cup B\ ^*.$$

13. Demostrar la igualdad:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A' \cup B')' = A \cap (B \cup C).$$

14. Demostrar que

$$A \cup B = A \cup C \quad \text{y} \quad A \cap B = A \cap C \implies B = C.$$

15. Demostrar la equivalencia:

$$(A \cap C') \cup (B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C) = C \iff A = B = O.$$

16. Demostrar la igualdad:

$$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A.$$

17. El conjunto de puntos de un círculo, ¿puede ser intersección de los conjuntos de puntos de semiplanos?

18. ¿Qué es, en general, la intersección de los conjuntos de puntos de dos ángulos? ¿Y de los triángulos?

19. ¿La reunión de los conjuntos de puntos de dos semiplanos es, en general, el conjunto de puntos de un ángulo cóncavo o convexo?

20. Si

$$A \equiv \{x | x \in N^*,\ x = \dot{2}\} \quad \text{y} \quad B \equiv \{x | x \in N^*,\ x = \dot{3}\},$$

hallar $A \cap B$ y $A \cup B$.

---

* $A \cap C \subseteq A \cup B$.

21. Se hizo un cuestionario, formado por tres preguntas, a un grupo de personas. Cada pregunta debía contestarse con sí o con no y una sola de estas respuestas era correcta. Si sabemos que: Un 8% contestaron bien las tres preguntas, el 9% contestaron bien sólo la primera y la segunda, el 11% contestaron bien sólo la primera y la tercera, el 6% contestaron bien sólo la segunda y la tercera, el 55% contestaron bien la primera pregunta, por lo menos, el 32% contestaron bien la segunda pregunta, por lo menos, y el 49% contestaron bien la tercera pregunta, por lo menos. ¿Qué porcentaje de personas no contestó bien ninguna pregunta?

Solución:

Un 6%.

22. En un pueblo que se editan los tres periódicos *A*, *B* y *C*, se hizo una encuesta entre los adultos de uno y otro sexo, cuyo resultado fue como sigue: el 50% leen el periódico *A*, por lo menos; el 40% leen el periódico *B*, por lo menos; el 45% leen el periódico *C*, por lo menos; el 15% leen los periódicos *A* y *B*, por lo menos; el 20% leen los periódicos *A* y *C*, por lo menos; el 15% leen los periódicos *B* y *C*, por lo menos, y el 10% no lee ningún periódico. ¿Qué porcentaje de adultos leen los tres periódicos?

Solución:

Un 5%.

3
relaciones binarias

19. Pares

1. Todo conjunto $z=(x, y)$, de dos elementos ordenados, lo llamaremos *par*.

A x se le llama *primer elemento, primer componente* o *primera coordenada;* y, es el *segundo elemento, segundo componente* o *segunda coordenada.*

2. A veces pondremos

$$x=\text{proy}_1\, z \qquad y=\text{proy}_2\, z$$

3. Dos pares $z=(x, y)$, $z'=(x', y')$ son iguales y escribiremos $z=z'$ si, y sólo si, $x=x'$ e $y=y'$.

De la definición se sigue que es esencial el orden de los componentes; así, por ejemplo, $(-5, 3)$ y $(3, -5)$ son pares distintos. Precisamente el que sea fundamental el orden de los elementos en los pares hace la naturaleza de éstos distinta de la de los conjuntos, es decir,

$$(x, y) \neq \{x, y\}.$$

A continuación ponemos un ejemplo para hacer resaltar más las diferencias existentes entre pares y conjuntos:

$$\{x, x\} \equiv \{x\}$$

en cambio (x, x) sigue siendo un par, aunque tenga sus coordenadas iguales.

4. En general, a todo conjunto $z=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos ordenados le llamaremos *n-ple*. A $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se les llama,

respectivamente, 1.°, 2.°, ..., n° *elemento, componente* o *coordenada* de z.

En particular, para $n=3$ ó 4 a z se le llama *terna* o *cuaterna*, respectivamente. A veces al conjunto z le llamaremos *punto*.

5. Dos n-ples $z=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $z'=(x_1', x_2', ..., x_n')$ son iguales y escribiremos $z=z'$ si, y sólo si, $x_i=x_i'$ para $i=1, 2, ..., n$.

20. Producto cartesiano de dos conjuntos

1. Dados los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, se llama *producto cartesiano* de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$ al conjunto de todos los pares (x, y) cuyo primer componente pertenece a $\boldsymbol{A}$ y el segundo a $\boldsymbol{B}$.

Los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son los *factores* del producto cartesiano.

Si el producto de los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ lo designamos en la forma $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$, se tendrá, por definición:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \equiv \{(x, y) | x \in \boldsymbol{A} \text{ e } y \in \boldsymbol{B}\}$$

Ejemplos:

a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{m, n\}$, se tiene:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \equiv \{(1, m); (1, n); (2, m); (2, n); (3\ m); (3, n)\}.$$

b) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2\}$, se tiene:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} \equiv \{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2)\}.$$

En particular, si $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$, el producto cartesiano $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ se representa con la notación $\boldsymbol{A}^2$.

Ejemplos:

a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3\}$, se tiene:

$$\boldsymbol{A}^2 \equiv \{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1); (3,2); (3,3)\}.$$

b) $\boldsymbol{N}^2 \equiv \{(x, y) | x \in \boldsymbol{N} \text{ e } y \in \boldsymbol{N}\}$.

c) $\boldsymbol{R}^2 \equiv \{(x, y) | x \in \boldsymbol{R} \text{ e } y \in \boldsymbol{R}\}$.

2. Si $B \neq A$, como

$$A \times B \equiv \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$$

y

$$B \times A \equiv \{(y, x) | y \in B \text{ y } x \in A\}$$

y

$$(x, y) \neq (y, x)$$

podemos concluir que:

$$A \times B \neq B \times A$$

esto es: *El producto cartesiano de conjuntos no tiene la propiedad conmutativa.*

3. Se generaliza fácilmente el producto de conjuntos al caso de que éstos sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Su producto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ es el conjunto de todos los n-ples, cuyos 1.°, 2.°, ..., n° componentes pertenecen, respectivamente, al 1.°, 2.°, ..., n° de los factores del producto.

Si representamos este producto con la notación

$$\prod_{i=1}^{n} A_i,$$

se tendrá:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}$$

En particular, si $A = A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_n$, el producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ se representa con la notación A^n.

4. Si son tres los factores, A, B y C, y formamos los productos

$$A \times B \times C \equiv \{(x, y, z) | x \in A, y \in B, z \in C\}$$

$$(A \times B) \times C \equiv \{((x, y), z) | (x, y) \in A \times B, z \in C\}$$

$$A \times (B \times C) \equiv \{(x, (y, z)) | x \in A, (y, z) \in B \times C\}$$

como:

$$(x, y, z) \neq ((x, y), z) \neq ((x, (y, z))$$

dichos productos son distintos. En la práctica, sin embargo, *convendremos* en considerar como iguales a los elementos (x, y, z), $((x, y), z)$ y $(x, (y, z))$, con cuyo convenio podemos concluir que:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$$

La segunda de las igualdades obtenidas nos prueba que: *La multiplicación de conjuntos tiene la propiedad asociativa.*

Ejemplos:

a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{m, n\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{1, 2, 3\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{p, q\}$, se tiene:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \{(m, 1);\ (m, 2);\ (m, 3);\ (n, 1);\ (n, 2);\ (n, 3)\} \times \{p, q\} = \{(m, 1, p);\ (m, 1, q);\ (m, 2, p);\ (m, 2, q);\ (m, 3, p);\ (m, 3, q);\ (n, 1, p);\ (n, 1, q);\ (n, 2, p);\ (n, 2, q);\ (n, 3, p);\ (n, 3, q).$$

b) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2\}$, se tiene:

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{A} \equiv \{(1, 1);\ (1, 2);\ (2, 1);\ (2, 2)\} \times \{1, 2\} \equiv \{(1, 1, 1);\ (1, 1, 2);\ (1, 2, 1);\ (1, 2, 2);\ (2, 1, 1);\ (2, 1, 2);\ (2, 2, 1);\ (2, 2, 2)\}.$$

c) $\boldsymbol{N}^3 \equiv \{(x, y, z) | x \in \boldsymbol{N},\ y \in \boldsymbol{N},\ z \in \boldsymbol{N}\}$.

d) $\boldsymbol{R}^3 \equiv \{(x, y, z) | x \in \boldsymbol{R},\ y \in \boldsymbol{R},\ z \in \boldsymbol{R}\}$.

Propiedades del producto cartesiano.

(1) $$\boldsymbol{A}_1 \subseteq \boldsymbol{B}_1,\quad \boldsymbol{A}_2 \subseteq \boldsymbol{B}_2 \iff \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2 \subseteq \boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{B}_2$$

DIRECTO. I. Si uno de los conjuntos $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ (o ambos) fuera vacío, tendrá que ser

$$\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O};$$

pues si no fuera $\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2$ vacío, este producto contendría por lo menos un par (x, y), y, por tanto, $x \in \boldsymbol{A}_1$, $y \in \boldsymbol{A}_2$, en contra de la hipótesis de suponer uno o ambos de los conjuntos $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ vacíos.

Siendo $A_1 \times A_2$ el conjunto vacío y estar éste contenido en cualquier conjunto, se tendrá, en definitiva,

$$A_1 \times A_2 \subseteq B_1 \times B_2$$

II. Si los conjuntos A_1, A_2 son no vacíos, se tendrá:
Todo

$$(x, y) \in A_1 \times A_2 \Longrightarrow x \in A_1, \quad y \in A_2$$

Por otra parte, de

$$x \in A_1 \quad \text{y de} \quad A_1 \subseteq B_1$$

se sigue que

$$x \in B_1$$

Análogamente, de

$$y \in A_2 \quad \text{y de} \quad A_2 \subseteq B_2$$

se sigue que

$$y \in B_2$$

Luego

$$(x, y) \in B_1 \times B_2$$

y, por tanto,

$$A_1 \times A_2 \subseteq B_1 \times B_2$$

RECIPROCO. El recíproco es cierto siempre y cuando que A_1 y A_2 sean o vacíos o no vacíos, pues, en efecto:
Todo

$$x \in A_1, \quad y \in A_2 \Longrightarrow (x, y) \in A_1 \times A_2$$

y como, por hipótesis,

$$A_1 \times A_2 \subseteq B_1 \times B_2\,,$$

se tendrá:

$$(x, y) \in B_1 \times B_2\,,$$

de donde

$$x \in B_1 \qquad y \in B_2$$

y, por tanto,

$$A_1 \subseteq B_1 \qquad A_2 \subseteq B_2 .$$

Distributividad del producto cartesiano con respecto a las otras operaciones con conjuntos.

(2) $$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &\equiv \{(x, y) | x \in A,\ y \in (B \cap C)\} = \\ &= \{(x, y) | x \in A,\ (y \in B \text{ e } y \in C)\} = \\ &= \{(x, y) | (x \in A,\ y \in B) \text{ y } (x \in A,\ y \in C)\} = \\ &= (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

Análogamente:

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

(3) $$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &\equiv \{(x, y) | x \in A,\ y \in (B \cup C)\} = \\ &= \{(x, y) | x \in A,\ (y \in B \text{ o } y \in C)\} = \\ &= \{(x, y) | (x \in A,\ y \in B) \text{ o } (x \in A,\ y \in C)\} = \\ &= (A \times B) \cup (A \times C). \end{aligned}$$

Análogamente:

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

(4) $$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}A\times(B-C)&\equiv\{(x,y)|x\in A,\ y\in B-C\}=\\&=\{(x,y)|x\in A,\ (y\in B \text{ e } y\notin C)\}=\\&=\{(x,y)|(x,y)\in A\times B \text{ y } (x,y)\notin A\times C\}=\\&=(A\times B)-(A\times C).\end{aligned}$$

Análogamente:

$$(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A).$$

(5) $$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}A\times(B+C)&=A\times[(B\cup C)-(B\cap C)]=\\&=[A\times(B\cup C)]-[A\times(B\cap C)]=\\&=[(A\times B)\cup(A\times C)]-[(A\times B)\cap(A\times C)]=\\&=(A\times B)+(A\times C).\end{aligned}$$

Análogamente:

$$(B+C)\times A=(B\times A)+(C\times A).$$

OTRAS PROPIEDADES.

(6) $$(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)=(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}&(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)\equiv\\&\equiv\{(x,y)|(x\in A_1 \text{ y } x\in A_2),\ (y\in B_1 \text{ e } y\in B_2)\}=\\&=\{(x,y)|(x\in A_1,\ y\in B_1) \text{ y } (x\in A_2,\ y\in B_2)\}=\\&=(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2).\end{aligned}$$

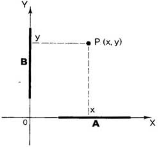
(7) $$\begin{aligned}&(A_1\cup A_2)\times(B_1\cup B_2)=\\&\qquad=(A_1\times B_1)\cup(A_1\times B_2)\cup(A_2\times B_1)\cup(A_2\times B_2).\end{aligned}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}(A_1\cup A_2)\times(B_1\cup B_2)&=[A_1\times(B_1\cup B_2)]\cup[A_2\times(B_1\cup B_2)]=\\&=(A_1\times B_1)\cup(A_1\times B_2)\cup(A_2\times B_1)\cup(A_2\times B_2).\end{aligned}$$

21. Diagramas de los productos cartesianos de conjuntos

I. Se facilita extraordinariamente la comprensión de los productos cartesianos de dos conjuntos de una dimensión mediante una representación gráfica adecuada.



Dado el producto $A \times B$, y supuesto trazado en el plano un sistema cartesiano, convendremos en representar gráficamente el par (x, y), por el punto $P(x, y)$ y, el producto $A \times B$, por el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$.

Ejemplos:

Representar gráficamente el producto cartesiano $A \times B$ en los casos que a continuación se indican.

a) Si $A \equiv \{1, 2, 3\}$ y $B \equiv \{2, 4\}$;

b) Si $A \equiv \{1, 2, 3\}$ y $B \equiv \{1, 2, 3\}$;

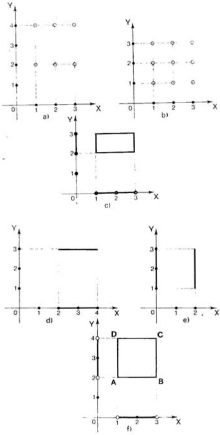
c) Si $A \equiv \{x | x \in R,\ 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ y $B \equiv \{y | y \in R,\ 2 \leqslant y \leqslant 3\}$;

d) Si $A \equiv \{x | x \in R,\ 2 \leqslant x \leqslant 4\}$ y $B \equiv \{3\}$;

e) Si $A \equiv \{2\}$ y $B \equiv \{y | y \in R,\ 1 \leqslant y \leqslant 3\}$;

f) Si $A \equiv \{x | x \in R,\ 1 < x < 3\}$ y $B \equiv \{y | y \in R,\ 2 < y < 4\}$;

Soluciones:



OBSERVACIONES. 1. El producto cartesiano de dos conjuntos es finito o infinito, según que los conjuntos de partida sean finitos o infinitos, respectivamente.

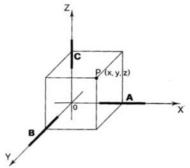
2. El producto del ejemplo *f)* es *abierto,* es decir, está integrado por los puntos del cuadrado *ABCD,* excluidos los puntos de su perímetro.

3. El producto $N^* \times N^* = N^{*2}$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números naturales, como lo es, por ejemplo, el conjunto de todos los números racionales de términos enteros positivos. Por lo general, ambos conjuntos pueden tomarse como iguales.

El conjunto N^{*2} tiene como representación gráfica el conjunto de todos los puntos de coordenadas enteras positivas de un plano cartesiano.

4. El producto $R \times R = R^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales; esto es, el conjunto de todos los números complejos. El conjunto R^2 está representado gráficamente por el conjunto de todos los puntos de un plano cartesiano.

II. Si los conjuntos de partida fueran A, B, C adoptaríamos como representación gráfica de cada terna (x, y, z) del producto $A \times B \times C$, el punto $P(x, y, z)$ y, como representación gráfica de dicho producto, al conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$.



Ejemplos:

1. Representar gráficamente el producto cartesiano $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ en los casos siguientes:

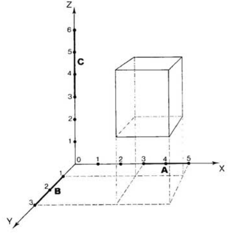
a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{R},\ 3 \leqslant x \leqslant 5\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{y | y \in \boldsymbol{R},\ 1 \leqslant y \leqslant 3\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{z | z \in \boldsymbol{R},\ 3 \leqslant z \leqslant 6\}$;

b) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{3\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{y | y \in \boldsymbol{R},\ 1 \leqslant y \leqslant 3\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{z | z \in \boldsymbol{R},\ 3 \leqslant z \leqslant 5\}$;

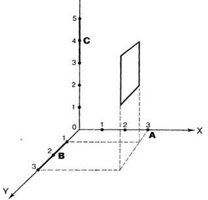
c) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{3\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{2\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{z | z \in \boldsymbol{R},\ 3 \leqslant z \leqslant 5\}$.

Soluciones:

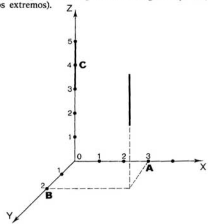
a) Conjunto de puntos del prisma de la figura adjunta (incluida la superficie).



b) Conjunto de puntos del rectángulo de la figura adjunta (incluido el perímetro).



c) Conjunto de puntos del segmento de la figura adjunta (incluidos los extremos).



2. Representar gráficamente el producto cartesiano $A \times B$ en los casos siguientes:

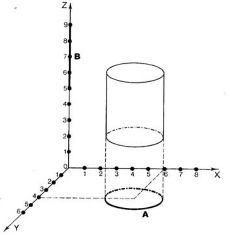
a) Si $A \equiv \{(x, y)|(x, y) \in R^2,\ (x-6)^2+(y-4)^2=4\}$ y $B \equiv \{z|z \in R,\ 5 \leqslant z \leqslant 9\}$;

b) Si $A \equiv \{(x, y)|(x, y) \in R^2,\ (x-6)^2+(y-4)^2 \leqslant 4\}$ y $B \equiv \{z|z \in R,\ 5 \leqslant z \leqslant 9\}$.

Soluciones:

a) Conjunto de puntos de la superficie cilíndrica de la figura adjunta.

b) Conjunto de puntos del cilindro, incluida su superficie, de la figura adjunta.



22. Relaciones binarias

Dados los conjuntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y una propiedad o *relación* R entre los elementos de dichos conjuntos, diremos que los componentes de un par (x, y) de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ están en la relación R si entre ellos se verifica la repetida propiedad; por tanto:

Para definir una relación R entre los elementos de dos conjuntos basta fijar una propiedad o ley que permita decidir sin ambigüedad, para cada par (x, y) de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, si x está en la relación R con y o no. En el primer caso se escribe:

$$x R y$$

y se lee: «x está en la relación R con y».

Se llama *relación de A a B* al subconjunto $\mathcal{R}$ de todos los pares (x, y) de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ tales que $x R y$; es decir:

$$\mathcal{R} \equiv \{(x, y) | (x, y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B},\ x R y\}$$

En particular, si $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ a $\mathcal{R}$ se llama *relación en A*. Salvo que explícitamente se advierta lo contrario, en adelante nos referiremos a este caso.

Si (x, y) es un par de $\mathcal{R}$, es decir, si $x R y$, x es un *antecedente* de la relación $\mathcal{R}$, e y un *sucesor* de x en dicha relación.

El conjunto de todos los antecedentes x es el *dominio* de la relación $\mathcal{R}$; lo representaremos con $\boldsymbol{D}$, y el conjunto de todos los sucesores y, es el *rango* de la repetida relación.

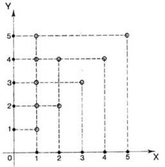
Al conjunto de todos los pares del producto $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2$, que tienen sus componentes iguales, se llama *diagonal* de dicho producto y se representa con $\mathfrak{D}$; por tanto:

$$\mathfrak{D} \equiv \{(x, y) | (x, y) \in \boldsymbol{A}^2,\ x = y\}$$

Diagramas de las relaciones. Si los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son lineales, se facilita la comprensión de las relaciones, representando los elementos de los conjuntos por puntos de los ejes de un sistema cartesiano, cada par (x, y) de $\mathcal{R}$ por el punto del plano que tiene estas coordenadas y, finalmente, el subconjunto $\mathcal{R}$ por el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $x R y$.

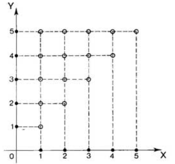
Ejemplos:

a) Si $\mathbf{A} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y R es la propiedad de ser divisor, $x R y$ significa «x es divisor de y», y el conjunto de pares (x, y) para los cuales $x R y$ es $\mathcal{R} \equiv \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 2); (2, 4); (3, 3); (4, 4); (5, 5)\}$.
La representación gráfica de $\mathcal{R}$ está indicada en la figura adjunta; A es simultáneamente dominio y rango de R.



Obsérvese que $\mathcal{R}$ es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A = A^2$ y que en $\mathcal{R}$ a cada x está asociado o *corresponde* al menos una y.

b) Si $A \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $x R y$ significa $x \leqslant y$, se tiene $\mathcal{R} \equiv \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (4, 4); (4, 5); (5, 5)\}$.
También en este caso A es simultáneamente dominio y rango.



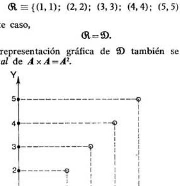
c) Si $A \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $x R y$ significa $x = y$, se tiene:

$$\mathcal{R} \equiv \{(1,1);\ (2,2);\ (3,3);\ (4,4);\ (5,5)\}.$$

En este caso,

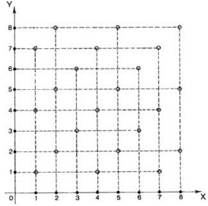
$$\mathcal{R} = \mathcal{D}.$$

A la representación gráfica de $\mathcal{D}$ también se le llama *diagonal* de $A \times A = A^2$.



Obsérvese cómo en este caso a cada x corresponde una y, y sólo una.

d) Si $A \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $x R y$ significa «x congruente con y respecto al módulo $m = 3$ *», es decir, si $x R y$ significa $x \equiv y(3)$, se tiene: $\mathcal{R} \equiv \{(1, 1); (1, 4); (1, 7); (2, 2); (2, 5); (2, 8); (3, 3); (3, 6); (4, 1); (4, 4); (4, 7); (5, 2); (5, 5); (5, 8); (6, 3); (6, 6); (7, 1); (7, 4); (7, 7); (8, 2); (8, 5); (8, 8)\}$.



Compruébese que esta relación tiene las propiedades siguientes:

1.° $x R x$;

2.° $x R y \Longrightarrow y R x$;

3.° $x R y$ e $y R z \Longrightarrow x R z$.

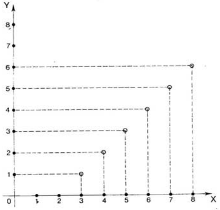
---

* Dos números x e y se llaman *congruentes* respecto del módulo m cuando divididos por él dan el mismo resto. Esta relación de congruencia la expresaremos así: $x \equiv y$ (mód. m) o, más brevemente, $x \equiv y(m)$. *Algebra Moderna*, BIRKHOFF y MAC LANE, pág. 24 de la traducción española. Editorial Teide. Barcelona.

e) Si $A \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $x\,R\,y$ significa $x = y + 2$, se tiene:

$$\mathcal{R} \equiv \{(3, 1);\ (4, 2);\ (5, 3);\ (6, 4);\ (7, 5);\ (8, 6)\}.$$

El dominio de esta relación es el conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y su rango el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

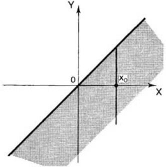


Obsérvese que a cada elemento de su dominio corresponde un elemento, y sólo uno, de su rango y que tanto el dominio como el rango son parte del conjunto dado A.

f) Si R es el conjunto dado y $x\,R\,y$ significa $x \geqslant y$, $\mathcal{R}$ tiene como representación gráfica el conjunto de puntos del semiplano (incluido el borde) inferior, de los dos semiplanos en que la bisectriz del primer y tercer cuadrante descompone al plano.

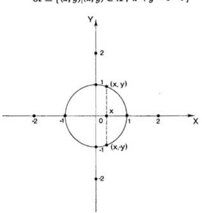
El dominio y el rango son iguales al conjunto dado R.

Obsérvese que a cada x_0 del dominio corresponden infinitos y del rango, es decir, a cada x_0 corresponden infinitos pares (x_0, y), que sólo difieren en su segunda componente.



g) Si $A \equiv \{x | x \in R, -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ y xRy significa $x^2+y^2-1=0$; se tiene:

$$\mathcal{R} \equiv \{(x, y) | (x, y) \in A^2, x^2+y^2-1=0\}$$



$\mathcal{R}$ tiene como representación gráfica el conjunto de puntos de la figura adjunta.

El dominio y el rango son iguales al conjunto

$$\{x | x \in \boldsymbol{R}, \ -1 \leqslant x \leqslant 1\};$$

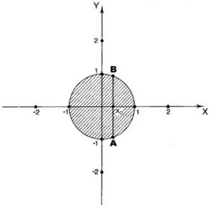
por tanto, dominio y rango están contenidos en el conjunto dado $\boldsymbol{A}$.

Obsérvese que a cada x del dominio corresponden dos valores para y, es decir, a cada x corresponden dos pares (x, y), $(x, -y)$ en $\mathcal{R}$.

h) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{R}, \ -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ y $x \, R \, y$ significa $x^2 + y^2 < 1$; se tiene:

$$\mathcal{R} \equiv \{(x, y) | (x, y) \in \boldsymbol{A}^2, \ x^2 + y^2 < 1\}$$

$\mathcal{R}$ tiene como representación gráfica el conjunto de puntos del círculo que se indica en la figura adjunta.



Obsérvese que a cada x_0 del dominio corresponden infinitos y del rango, es decir, a cada x_0 corresponden infinitos pares (x_0, y) que sólo difieren en su segunda coordenada. Este subconjunto de pares tiene como representación gráfica el conjunto de puntos del segmento abierto AB.

23. Propiedades de las relaciones binarias

En general, las relaciones binarias tienen una o varias de las propiedades siguientes:

Reflexiva. Una relación R entre los elementos de un conjunto A diremos que tiene la propiedad *reflexiva* si, y sólo si, para todo $x \in A$ se verifica $x R x$, es decir:

$$(\forall x, x \in A): \quad x R x$$

Ejemplos:

a) La igualdad.

b) La semejanza de polígonos.

c) La congruencia de números.

Son relaciones que tienen la propiedad reflexiva.

En cambio, no tienen propiedad reflexiva:

α) La perpendicularidad de rectas.

β) La relación familiar de paternidad.

Si la relación R tiene la propiedad reflexiva, $\mathcal{R}$ contendrá a todos los pares (x, x) tal que $x \in A$; es decir, $\mathcal{R}$ contendrá a la diagonal del producto $A \times A$, o sea:

$$\mathcal{R} \supseteq \mathcal{D}.$$

Simétrica. La relación R tiene la propiedad simétrica si, y sólo si:

$$x R y \Longrightarrow y R x$$

Ejemplos:

a) La igualdad.

b) La congruencia de números.

c) El paralelismo de rectas.

d) La perpendicularidad de rectas.
e) La semejanza de polígonos.
f) La relación familiar «x es hermano de y».

Son relaciones que tienen la propiedad simétrica.

En cambio, no tienen propiedad simétrica, en el conjunto de los números naturales, las relaciones:

α) «x divide a y».
β) «$x < y$».

Tampoco tienen propiedad simétrica en el conjunto de los seres humanos las relaciones:

γ) «x es padre de y».
δ) «x es abuelo de y».

Es inmediato que el diagrama de una relación simétrica es simétrico con respecto a la diagonal del producto $A \times A$.

Es de observar que el que una relación sea simétrica no implica que tenga que serlo reflexiva.

Transitiva. La relación R tiene la propiedad transitiva si, y sólo si:

$$x R y \quad \text{e} \quad y R z \Longrightarrow x R z$$

Ejemplos:

a) La igualdad.
b) La congruencia de números.
c) El paralelismo de rectas.
d) La semejanza de polígonos.
e) Las relaciones familiares «hermano» y «primo».

Son relaciones transitivas.

En cambio, las relaciones siguientes no son transitivas:

α) La perpendicularidad de rectas.
β) Las relaciones familiares «padre», «abuelo».

Antisimétrica. La relación R tiene la propiedad antisimétrica si conteniendo $\mathcal{R}$ un par, al menos, de elementos desiguales:

$$x R y \quad \text{e} \quad y R x \Longrightarrow x = y$$

Por tanto:

Si $\quad x R y \;$ y $\; x \neq y \;$ no puede ser $\; y R x.$

Ejemplos:

a) La relación $\leqslant$ en el conjunto $\boldsymbol{R}$.

b) La relación $\subseteq$ entre los subconjuntos del conjunto de las partes de un conjunto universal dado.

Son relaciones antisimétricas.

En cambio, las relaciones siguientes no son antisimétricas:

α) La congruencia de números.

β) El paralelismo de rectas.

γ) La perpendicularidad de rectas.

δ) La semejanza de polígonos.

Es de observar que la antisimetría no excluye la reflexividad, pero sí la simetría, y que existen relaciones que no son simétricas ni antisimétricas.

24. Relaciones de equivalencia

I. Si entre los elementos de un conjunto A se ha establecido una relación R, y ésta posee las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, diremos que R es una *relación de equivalencia.*

En símbolos, R es de equivalencia si se verifica:

(1) $\quad (\forall\, x,\, x \in A)$: $\quad x R x \quad$ Reflexiva.

(2) $\quad x R y \Longrightarrow y R x \quad$ Simétrica.

(3) $\quad x R y \;$ e $\; y R z \Longrightarrow x R z \quad$ Transitiva.

Ejemplos:

a) La igualdad.

b) La congruencia de números.

c) El paralelismo de rectas (convendremos en que una recta es paralela a ella misma).

d) La semejanza de polígonos.

e) La equipolencia de vectores.

En cambio, las relaciones siguientes no son de equivalencia:

α) La relación $<$ en el conjunto $\mathbf{R}$.

β) La relación $\subset$ en el conjunto de las partes de un conjunto universal dado.

γ) La relación R en el conjunto $\mathbf{R}$, si $x R y$ significa $x = y^2$.

δ) La relación familiar de paternidad en la raza humana.

II. Si se verifica:

(*a*) $(\forall x,\ x \in A)(\exists y)(x R y)$

(*b*) $x R y \Longrightarrow y R x$ Simétrica.

(*c*) $x R y \text{ e } y R z \Longrightarrow x R z$ Transitiva.

También la relación R es de equivalencia.

En efecto:

Por (*a*): $(\forall x,\ x \in A)(\exists y)(x R y)$

Por (*b*): $x R y \Longrightarrow y R x$

Por (*c*): $x R y \text{ e } y R x \Longrightarrow x R x$

Luego R, además de las propiedades simétrica y transitiva, tiene la reflexiva y, por tanto, es de equivalencia.

Observación. El ejemplo siguiente nos prueba que hay relaciones que, a pesar de tener las propiedades simétrica y transitiva, no son de equivalencia.

Ejemplo:

Si entre los componentes de la raza humana establecemos la relación familiar «hermano», es inmediato que dicha relación tiene las propiedades simétrica y transitiva, pero no la reflexiva, y que, por tanto, no es de equivalencia la repetida relación.

Es de señalar que la relación de este ejemplo no posee la propiedad (*a*).

Si R es una relación de equivalencia, en lugar de escribir $x\,R\,y$, a veces lo expresaremos en la forma:

$$x \equiv y \ (\text{mód. } R)$$

que se lee «x equivalente a y, módulo R», y si no hay lugar a confusión, en la forma más simple «x equivalente a y».

Para ciertas relaciones de equivalencia se usan signos especiales. Así, por ejemplo, para expresar las relaciones de igualdad y la de paralelismo de rectas, se usan los signos $=$ y $\parallel$, respectivamente.

Equivalencia e igualdad. Como toda igualdad es una relación de equivalencia, pero, en cambio, hay relaciones de equivalencia que no son igualdades (semejanza de polígonos, congruencia de números, etc.), la noción establecida de relación de equivalencia constituye una generalización del concepto restringido de igualdad (identidad) y es precisamente en esta amplitud donde reside la utilidad de las relaciones de equivalencia.

25. Clase de equivalencia

Si A es un conjunto dotado de una relación de equivalencia R, se llama *clase de equivalencia* de un elemento $x \in A$, y la designaremos con la notación $C(x)$ al conjunto de todos los elementos de A equivalentes a x.

Ejemplos:

a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ y $x\,R\,y$ significa «x congruente a y con respecto al módulo 4», es decir,

$$x\,R\,y \iff x \equiv y \text{ (mód. 4)},$$

R es una relación de equivalencia y, por tanto: $\boldsymbol{C}(0) = \{0\}$, $\boldsymbol{C}(1) = \{1, 5, 9\}$, $\boldsymbol{C}(2) = \{2\}$, $\boldsymbol{C}(3) = \{3, 7\}$.

Observaciones. 1.ª Los elementos 0, 1, 2 y 3 son dos a dos no equivalentes (congruentes). 2.ª $\boldsymbol{C}(0)$, $\boldsymbol{C}(1)$, $\boldsymbol{C}(2)$ y $\boldsymbol{C}(3)$ son clases disyuntas. 3.ª $\boldsymbol{C}(0) \cup \boldsymbol{C}(1) \cup \boldsymbol{C}(2) \cup \boldsymbol{C}(3) = \boldsymbol{A}$. 4.ª El conjunto de clases $\{\boldsymbol{C}(0), \boldsymbol{C}(1), \boldsymbol{C}(2), \boldsymbol{C}(3)\}$ es una partición de $\boldsymbol{A}$.

b) Si $\boldsymbol{A}$ es el conjunto de todas las rectas del plano y $x\,R\,y$ significa «x es paralela a y», R es una relación de equivalencia y, por tanto, si x es una recta determinada del plano, $\boldsymbol{C}(x)$ es el conjunto de rectas integrado por x y todas las paralelas a x, esto es, el haz de rectas de vértice impropio determinado por la recta x.

Observaciones. 1.ª Toda recta x determina un haz impropio de rectas $\boldsymbol{C}(x)$. 2.ª Si $\boldsymbol{S} \equiv \{x, y, z, \dots\}$ es uno cualquiera de los conjuntos completos de rectas del plano dos a dos no equivalentes, esto es, dos a dos incidentes (como lo es, por ejemplo, el conjunto de las rectas de un haz de rectas de vértice propio), las clases $\boldsymbol{C}(x)$, $\boldsymbol{C}(y)$, $\boldsymbol{C}(z)$, ... serán disyuntas. 3.ª $\boldsymbol{C}(x) \cup \boldsymbol{C}(y) \cup \boldsymbol{C}(z) \cup \dots$ es el conjunto de todas las rectas del plano. 4.ª El conjunto de clases $\{\boldsymbol{C}(x), \boldsymbol{C}(y), \boldsymbol{C}(z), \dots\}$ es una partición del plano.

Dirección de una recta. Evidentemente, todas las rectas de $\boldsymbol{C}(x)$ tienen un «algo» en común (su paralelismo); ese «algo» común nos induce a crear un ente abstracto al que llamaremos *dirección de la recta* (una cualquiera de las rectas del haz).

La dirección de una recta sirve, pues, para representar los conjuntos de rectas equivalentes (paralelas) distinguiéndolos de los otros haces impropios de rectas.

Diremos también que todas las rectas de cada haz $\boldsymbol{C}(x)$ tienen igual *dirección*.

Por otra parte, como dada una recta x hay infinitas paralelas a ella, al haz formado por x y todas las paralelas a ella corresponde una misma dirección. Llamaremos *dirección* de una recta x a la dirección que corresponde al haz formado por x y todas sus paralelas.

CONSECUENCIAS. 1. *Todos los elementos de una clase de equivalencia son equivalentes entre sí.*

En efecto, si es $\boldsymbol{C}(x)$ la clase de equivalencia y $x_1 \in \boldsymbol{C}(x)$ y $x_2 \in \boldsymbol{C}(x)$, se tendrá: $x_1 R x$ y $x_2 R x$, y como $x_2 R x \Longrightarrow x R x_2$, tendremos:

$$x_1 R x \quad \text{y} \quad x R x_2 \Longrightarrow x_1 R x_2$$

2. *Una clase de equivalencia queda determinada por uno cualquiera de sus elementos.*

En efecto, si $\boldsymbol{C}(x)$ es una clase de equivalencia e $y \in \boldsymbol{C}(x)$, todos los elementos de $\boldsymbol{C}(x)$ serán equivalentes a y y, por tanto,

$$\boldsymbol{C}(y) = \boldsymbol{C}(x)$$

3. *Si dos clases de equivalencia tienen un elemento común, son iguales.*

En efecto, si $\boldsymbol{C}(x)$ y $\boldsymbol{C}(y)$ son las clases de equivalencia y z el elemento que pertenece a ambas, se tendrá:

$$z \in \boldsymbol{C}(x) \quad \text{y} \quad z \in \boldsymbol{C}(y).$$

Ahora bien:

$$z \in \boldsymbol{C}(x) \Longrightarrow \boldsymbol{C}(z) = \boldsymbol{C}(x)$$
$$z \in \boldsymbol{C}(y) \Longrightarrow \boldsymbol{C}(z) = \boldsymbol{C}(y)$$

Las dos últimas igualdades nos conducen finalmente a que

$$\boldsymbol{C}(x) = \boldsymbol{C}(y)$$

Teorema. *Si un conjunto* $\boldsymbol{A}$ *está dotado de una relación de equivalencia* R*, ésta determina una partición de* $\boldsymbol{A}$ *en clases de equivalencia.*

Tendremos que demostrar: 1.°, que R nos permite clasificar los elementos de A en clases disyuntas entre sí, y 2.°, que la reunión de esas clases es A.

1.° Si $\{x, y, z, \dots\}$ es uno cualquiera de los conjuntos completos de elementos de A, dos a dos no equivalentes, las clases

$$(1) \qquad C(x),\ C(y),\ C(z),\ \dots$$

serán disyuntas, puesto que si dos de éstas, la $C(x)$ y $C(y)$, por ejemplo, tuvieran un elemento común, serían iguales y, por tanto, x e y equivalentes, en contra de la hipótesis.

Es inmediato que todo elemento de la reunión de las clases (1) pertenece a A.

2.° Recíprocamente, todo elemento w de A debe pertenecer a una (y sólo una) de las clases (1), pues de no ser así, w no sería equivalente a ninguno de los $\{x, y, \dots, z\}$, en contra de la hipótesis. Por tanto:

$$A = C(x) \cup C(y) \cup C(z) \cup \dots$$

Unicidad de la partición. Vamos a probar ahora que la partición que determina R en A es única.

En efecto: Si $\{x', y', z', \dots\}$ es otro de los conjuntos completos de elementos de A, dos a dos no equivalentes, como cada uno de los elementos del conjunto $\{x, y, z, \dots\}$ tendrá su equivalente (único) en $\{x', y', z', \dots\}$, y viceversa. Las particiones

$$\{C(x),\ C(y),\ C(z),\ \dots\} \quad \text{y} \quad \{C(x'),\ C(y'),\ C(z'),\ \dots\}$$

son una misma.

26. Conjunto cociente

Si A es un conjunto dotado de una relación de equivalencia R, se llama *conjunto cociente* de A por R y se designa con la notación $\dfrac{A}{R}$ al conjunto de todas las clases de equivalencia determinadas en A por R.

Por tanto, si $\{x, y, z, \dots\}$ es uno cualquiera de los conjuntos completos de elementos de A, dos a dos no equivalentes, por definición se tiene:

$$\frac{A}{R} = \{C(x),\ C(y),\ C(z),\ \dots\}$$

Observación. Es de señalar que A y $\frac{A}{R}$ representan el mismo conjunto; la diferencia estriba en que se prefiere la segunda notación cuando se trata de poner de manifiesto que los elementos de A han sido clasificados en clases de equivalencia.

Ejemplos:

a) Si A es el conjunto de los números enteros ($A = Z$) y R es la relación de congruencia con respecto al módulo 4, las clases de equivalencia son:

$$C(0) = \{0, 4, 8, 12, \dots;\ -4, -8, -12, \dots\}.$$
$$C(1) = \{1, 5, 9, 13, \dots;\ -3, -7, -11, \dots\}.$$
$$C(2) = \{2, 6, 10, 14, \dots;\ -2, -6, -10, \dots\}.$$
$$C(3) = \{3, 7, 11, 15, \dots;\ -1, -5, -9, \dots\}.$$

y, por tanto, el conjunto cociente es:

$$\frac{Z}{R} = \{C(0),\ C(1),\ C(2),\ C(3)\}$$

b) Si $A \equiv \{(m, n) | (m, n) \in Z^2,\ n \neq 0\}$ y para $x = (m, n)$, $y = (p, q)$; $x R y$ significa $m \cdot q = n \cdot p$, es fácil probar que R es una relación de equivalencia entre los elementos (pares) de A; por tanto, si $\{x, y, z, \dots\}$ es uno cualquiera de los conjuntos completos de elementos de A, dos a dos no equivalentes,

$$\frac{A}{R} \equiv \{C(x),\ C(y),\ C(z),\ \dots\}$$

será una partición de A en clases de equivalencia. R nos clasifica, pues, el conjunto de los pares de A, en subconjuntos o clases tales que todos los infinitos pares que forman una clase cualquiera de esas clases son equivalentes entre sí.

Ahora bien, como todos los elementos de una cualquiera $C(x)$, de las clases del conjunto cociente $\frac{A}{R}$, tienen un «algo» en común (su equivalencia), nos parece natural crear un ente abstracto, al que llamaremos *número racional x*, que nos sirva para representar los pares equivalentes de $C(x)$.

Por otra parte, como la clase $C(x)$ queda determinada unívocamente por uno cualquiera de los infinitos pares que la forman; el ente creado para ella podrá ser representado indistintamente por cualquiera de los pares de $C(x)$. Así, por ejemplo, la clase

$$C[(2, 3)] \equiv \{(2, 3), (4, 6), (6, 9), \ldots\}$$

da lugar a la creación de un número racional, que puede ser representado por uno cualquiera de los pares $(2, 3)$, $(4, 6)$, $(6, 9)$, ... Es decir, el ente creado es único, pero, en cambio, su representación simbólica es múltiple.

Finalmente, como cada clase de $\frac{A}{R}$ da lugar a la creación de un número racional, la relación R determinará en A tantos números racionales como clases tiene el conjunto cociente $\frac{A}{R}$.

Al conjunto de números racionales originados en A por la relación de equivalencia R se le llama *cuerpo de los números racionales*.

27. Las relaciones de equivalencia como generadoras de entes abstractos

Si A es un conjunto dotado de una relación de equivalencia R y $\{x, y, z, \ldots\}$ es uno cualquiera de los conjuntos completos de elementos de A, dos a dos no equivalentes,

$$\frac{A}{R} \equiv \{C(x), C(y), C(z), \ldots\}$$

es una partición de A en clases de equivalencia, y puesto que todos los elementos de una cualquiera $C(x)$, de las clases del conjunto cociente $\frac{A}{R}$, son equivalentes entre sí, vamos a crear un ente abstracto al que llamaremos *ente x*, que nos sirva para representar los elementos equivalentes entre sí de $C(x)$.

Ahora bien, como $C(x)$ queda determinada unívocamente por uno cualquiera de los elementos que la forman, el ente creado para ella podrá ser representado indistintamente por uno cualquiera de los elementos de $C(x)$.

Finalmente, como cada clase de $\frac{A}{R}$ da lugar a un ente abstracto, la relación R generará en A tantos entes abstractos como clases tiene $\frac{A}{R}$.

En cada caso particular, la palabra «ente» será sustituida por la frase que convenga en el caso específico estudiado; así, se dirá: «número cardinal», «número racional», «vector libre», «dirección de», etc.

28. Relaciones de orden

Si entre los elementos de un conjunto A se ha establecido una relación R, y ésta posee las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva, diremos que R es una *relación de orden*. En símbolos, R es de orden si se verifica:

(1) $(\forall\, x,\ x \in A)\colon\ \ x\,R\,x$ Reflexiva.

(2) $\begin{cases} [\exists\,(x,y)]\,(x\,R\,y,\ x \neq y) \\ x\,R\,y \ \text{ e } \ y\,R\,x \implies x = y \end{cases}$ Antisimétrica.

(3) $x\,R\,y \ \text{ e } \ y\,R\,z \implies x\,R\,z$ Transitiva.

Ejemplos:

a) Si A es el conjunto de los números enteros ($A = \mathbf{Z}$) es fácil probar que la relación $\leqslant$ es una relación de orden.

b) En el conjunto $\mathbf{Z}$ de los números enteros, la relación $<$ no es de orden, puesto que no tiene la propiedad reflexiva.

Cuando una relación es de orden y no tiene una notación especial que la represente, en lugar de escribir $x R y$, se pone:

$$x \prec y \quad \text{ó} \quad y \succ x$$

y se lee «x precede a y», o bien «y sigue a x».
Los signos $\prec$ y $\succ$ se llaman *opuestos.*

Comparación de elementos. Si A es un conjunto dotado de una relación de orden $\prec$, dos elementos de A diremos que son comparables si $x \prec y$, o bien $y \prec x$.

Ordenes total y parcial. Si todos los elementos de A son dos a dos comparables, se dice que $\prec$ es una *relación de orden total.* En cambio, si existen pares de elementos no comparables, diremos que $\prec$ es una *relación de orden parcial.*

Ejemplos:

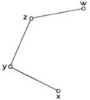
a) En el conjunto Z de los números enteros, la relación de orden $\leqslant$ es total, puesto que todos los elementos de Z son dos a dos comparables.

b) En el conjunto N^* de los números naturales, la relación $x \prec y$ (x divide a y) es inmediato que es una relación de orden. Ahora bien, como hay pares de elementos, el 5 y el 13, por ejemplo, para los que ni $5 \prec 13$, ni $13 \prec 5$, la relación $\prec$ es de orden parcial.

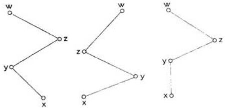
29. Diagramas de Hasse

Se facilita mucho la comprensión de las relaciones de orden (parcial o total) mediante unos esquemas llamados *diagramas de Hasse.*

Si A es un conjunto dotado de una relación de orden R, representaremos sus elementos por puntos o circulitos, de tal forma situados que si, por ejemplo, $x \prec y$, $y \prec z$, $z \prec w$ y unimos los circulitos x, y, z, w por segmentos de recta, se obtenga una poligonal que, partiendo de x, llegue a w, ascendiendo siempre. Es obvio que hay infinitos esquemas gráficos que reúnen las condiciones pedidas y que, por tanto, el problema es completamente indeterminado.



A título de aclaración ponemos algunos de los diagramas equivalentes al anterior:



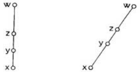
Ejemplos:

1.° Dibujar dos diagramas de orden total.

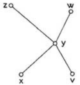
2.° Dibujar dos diagramas de orden parcial.

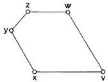
Solución:

1.°



2.°





30. Cotas de un conjunto totalmente ordenado

Sea A un conjunto dotado de una relación $<$ de orden total.

1.° Si $X \subseteq A$ y existe un $k \in A$ tal que, para todo $x \in X$, se verifica $x < k$, se dice que k es una *cota superior* de X.

2.° Si el conjunto de todas las cotas superiores de X contiene un elemento E, anterior a todas las restantes, a este elemento E se le llama *extremo superior* de X.

3.° Al extremo superior se le llama *máximo* de X cuando es *accesible*, es decir, cuando pertenece a X.

Dejamos al cuidado del lector las definiciones de *cota inferior, extremo inferior* y *mínimo* de X.

Cuando X tiene extremos inferior y superior pero éstos son inaccesibles, es decir, cuando dichos extremos no pertenecen al conjunto, se dice que X es un conjunto *abierto*.

Si sólo es el extremo inferior el inaccesible es *abierto por la izquierda*.

Análoga definición vale para *abierto por la derecha*.

Si el conjunto X tiene mínimo y máximo, se dice que es *cerrado* y se representa con la notación $\overline{X}$.

Ejemplos:

a) Si $A \equiv \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, $X \equiv \{x_4, x_5, x_7, x_9\}$ y $x_n < x_m$ significa $n \leqslant m$; A es un conjunto, totalmente ordenado, verificándose además $X \subset A$. Por tanto: x_1, x_2, x_3 y x_4 son cotas inferiores de X, x_4 extremo inferior y como es accesible, además es el mínimo de X.

Análogamente, x_9 y x_{10} son cotas superiores de $\boldsymbol{X}$; x_9 extremo superior, y como es accesible, además es el máximo de $\boldsymbol{X}$.

Por tener mínimo y máximo, el conjunto $\boldsymbol{X}$ es cerrado y podremos escribir: $\overline{\boldsymbol{X}}$.

b) Si $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}$, $\quad \boldsymbol{X} \equiv \left\{ x \middle| x = 1 - \frac{1}{10^n},\ n \in \boldsymbol{N}^* \right\}$

y $x \prec y$ significa $x \leqslant y$, se tiene: 0,9 es el mínimo, 1 es el extremo superior y como es inaccesible, $\boldsymbol{X}$ es un conjunto abierto por la derecha.

c) Si $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{X} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{Q},\ 1 < x < 2\}$ y $x \prec y$ significa $x \leqslant y$, se tiene: 1 es el extremo inferior, 2 el superior, y como ambos son inaccesibles, $\boldsymbol{X}$ es un conjunto abierto.

d) Si $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{X} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{R},\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ y $x \prec y$ significa $x \leqslant y$, se tiene: 0 es el mínimo, 1 el máximo y, por tanto, $\boldsymbol{X}$ es un conjunto cerrado. Luego podremos escribir: $\overline{\boldsymbol{X}}$.

Ejercicios:

a) Si $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{X}$ es finito, probar que $\boldsymbol{X}$ es cerrado.

b) Demostrar por reducción al absurdo, que si $\boldsymbol{A}$ es un conjunto totalmente ordenado y $\boldsymbol{X}$ es un subconjunto de $\boldsymbol{A}$ que tiene mínimo (máximo), éste es único.

Intervalos y entornos. Establecida la relación de orden total $\leqslant$ entre los números del conjunto $\boldsymbol{R}$; si a y b son dos números reales tales que $a < b$, se llama *intervalo cerrado* de extremos a y b, al conjunto

$$\{x | x \in \boldsymbol{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$$

lo representaremos con la notación $[a, b]$; a es el extremo inferior accesible o mínimo y b es el extremo superior accesible o máximo.

Se llama *intervalo abierto* de extremos a y b al conjunto

$$\{x | x \in \boldsymbol{R},\ a < x < b\}$$

lo representaremos con la notación $]a, b[$; a es el extremo inferior inaccesible y b el extremo superior inaccesible.

A veces se consideran intervalos semiabiertos: $[a, b[$, o bien $]a, b]$; quedan determinados por las condiciones respectivas:

$$a \leqslant x < b \quad \text{o bien} \quad a < x \leqslant b$$

En todo caso, a la diferencia

$$d = b - a$$

se le llama amplitud del intervalo.

Finalmente, llamaremos *intervalos* infinitos a los conjuntos de números dados por las condiciones $x \geqslant a$ o $x \leqslant a$ o al conjunto de todos los números reales. Los representaremos así:

$$[a, +\infty[\qquad]-\infty, a] \qquad]-\infty, +\infty[$$

Puesto que los números de un intervalo están representados por puntos de una recta, se les llama también *conjuntos lineales* o *conjuntos de una dimensión.*

Llamaremos *entorno* de un punto a al intervalo abierto

$$]a - \delta,\ a + \delta[$$

cualquiera que sea el número positivo δ.

De la definición resulta que a un punto le corresponden infinitos entornos, pues en ellos interviene el elemento arbitrario δ.

Ejemplos:

a) El conjunto $\{x | x \in \boldsymbol{R},\ 2 \leqslant x \leqslant 5\}$ es el intervalo cerrado de extremos 2 y 5; se representa con la notación $[2, 5]$.

b) El conjunto $\{x | x \in \boldsymbol{R},\ 1 < x < 3\}$ es el intervalo abierto de extremos 1 y 3; se representa con la notación $]1, 3[$.

c) Un entorno del punto 2 es cualquier intervalo abierto $]2 - \delta,\ 2 + \delta[$, donde δ es un número positivo cualquiera.

Conjuntos lineales convexos. I. Un subconjunto $\boldsymbol{X}$ del conjunto lineal $\boldsymbol{A}$ se llama *convexo* si para todo $x \in \boldsymbol{X}$, $x' \in \boldsymbol{X}$ se verifica

$$[x, x'] \subseteq \boldsymbol{X}.$$

II. Si $Y \subset A$, se llama *envoltura convexa* de Y a la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a Y. La representaremos con la notación $\widehat{Y}$.

Ejemplos:

a) Si $A = R$, $X = [1, 2]$ es un conjunto convexo.

b) Si $A = R$, $X =]3, 5[$ es también un conjunto convexo.

c) Si $A = R$, $X = \{[1, 2], [4, 6]\}$ no es un conjunto convexo.

d) Si $A = [1, 6]$, $X \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ no es un conjunto convexo.

e) Si $A = [1, 4]$, $X \equiv \{[1, 2[,]2, 4[\}$ no es un conjunto convexo.

f) Si $A = R$, $Y \equiv \{1, 2, 3, 4\}$; la envoltura convexa de Y es:

$$\widehat{Y} = [1, 4].$$

Conjunto bien ordenado. Un conjunto lineal A, dotado de una relación de orden total $<$ se dice que está *bien ordenado* cuando cualquier subconjunto no vacío de A posee un mínimo.

Al mínimo del propio conjunto A se le llama primer elemento de A.

Ejemplos:

Si $x < y$ significa $x \leqslant y$, los conjuntos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\{1, 3, 5\}$ están bien ordenados.

En cambio, los conjuntos $\{x | x \in Q,\ 3 < x \leqslant 4\}$ y $]0, 1[$ no están bien ordenados.

Tampoco está bien ordenado el intervalo cerrado $[2, 5]$. En efecto, hay subconjuntos no vacíos de él que no poseen mínimo. Por ejemplo, el $]3, 4[$.

En general, ningún intervalo, sea abierto o cerrado, está bien ordenado.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{a, b, c\}$, hallar $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$.

Solución:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \equiv \{(1, a),\ (1, b),\ (1, c),\ (2, a),\ (2, b),\ (2, c),\ (3, a),\ (3, b),\ (3, c),\ (4, a),\ (4, b),\ (4, c)\}.$$

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \equiv \{(a, 1),\ (a, 2),\ (a, 3),\ (a, 4),\ (b, 1),\ (b, 2),\ (b, 3),\ (b, 4),\ (c, 1),\ (c, 2),\ (c, 3),\ (c, 4)\}.$$

2. ¿Son iguales los productos $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ del ejercicio anterior?

Solución:

No, puesto que para que dos pares sean iguales no basta que tengan los mismos elementos; tienen que tener primeros y segundos componentes, respectivamente iguales.

3. Del conjunto $\boldsymbol{A}^2$ se conocen los elementos (a, b) y (c, d) y se sabe, además, que dicho conjunto tiene 16 elementos. Hallar los restantes elementos.

Solución:

Si representamos con n el número de elementos de $\boldsymbol{A}$, los elementos de $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ los obtendremos hallando las variaciones con repetición de orden 2 con estos n elementos. Su número es n^2.

Por tanto, $n^2 = 16$, luego $\boldsymbol{A}$ constará de 4 elementos, y como dos de los elementos de $\boldsymbol{A}^2$ son (a, b) y $(c; d)$, se tendrá:

$$\boldsymbol{A} \equiv \{a, b, c, d\}.$$

De donde

$$\boldsymbol{A}^2 = \{(a, a),\ (a, b),\ (a, c),\ (a, d),\ (b, a),\ (b, b),\ (b, c),\ (b, d),\ (c, a),\ (c, b),\ (c, c),\ (c, d),\ (d, a),\ (d, b),\ (d, c),\ (d, d)\}.$$

4. Si sobre el conjunto de los números enteros, $x\,R\,y$ significa $x=\dot{3}$ e $y=\dot{3}$, ¿es R una relación de equivalencia?

Solución:

No, puesto que si es, por ejemplo, $x=5$, no es cierta la propiedad reflexiva (24.(1)) $5\,R\,5$, ya que $5 \neq \dot{3}$. En cambio, es fácil probar que R tiene las propiedades simétrica y transitiva.

5. Si sobre el conjunto de los números enteros $x\,R\,y$ significa

$$|x-y|=\dot{2}$$

se pide: *a)* Probar que R es una relación de equivalencia; *b)* Hallar las clases de equivalencia, y *c)* Hallar el conjunto cociente.

Solución:

a) 1.° $(\forall\, x)$: $|x-x|=0=\dot{2} \Longrightarrow x\,R\,x.$

2.° $x\,R\,y \Longrightarrow |x-y|=\dot{2} \Longrightarrow |y-x|=\dot{2} \Longrightarrow y\,R\,x.$

3.° $x\,R\,y$ e $y\,R\,z \Longrightarrow |x-y|=\dot{2},$

$$|y-z|=\dot{2} \Longrightarrow |x-y+y-z|=\dot{2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |x-z|=\dot{2} \Longrightarrow x\,R\,z.$$

b) Como $\{0, 1\}$ es uno de los conjuntos completos de elementos de z dos a dos no equivalentes (25), las clases de equivalencia son:

$$C(0) \equiv \{0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \ldots\}$$
$$C(1) \equiv \{\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 7, \ldots\}.$$

c) El conjunto cociente es

$$\frac{\mathbf{Z}}{R} \equiv \{C(0),\ C(1)\}$$

6. Si sobre el conjunto de los números enteros, $x\,R\,y$ significa $x^2+x=y^2+y$, se pide: *a)* Probar que R es una relación de equivalencia. *b)* Hallar las clases de equivalencia. *c)* Hallar el conjunto cociente.

Solución:

a) 1.° $(\forall x)$: $x^2+x=x^2+x \Longrightarrow x\,R\,x$.

2.° $x\,R\,y \Longrightarrow x^2+x=y^2+y \Longrightarrow y^2+y=x^2+x \Longrightarrow y\,R\,x$.

3.° $x\,R\,y$ e $y\,R\,z \Longrightarrow x^2+x=y^2+y$,

$y^2+y=z^2+z \Longrightarrow x^2+x=z^2+z \Longrightarrow x\,R\,z$.

b) De

$$x\,R\,y \Longrightarrow x^2+x=y^2+y \Longrightarrow x^2-y^2=-(x-y) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (x-y)(x+y)=-(x-y)\ ;\ \text{para } x\neq y \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x+y=-1 \Longrightarrow y=-(x+1).$$

De la última igualdad se sigue que uno de los conjuntos completos de elementos de $\boldsymbol{Z}$, dos a dos no equivalentes, es $\boldsymbol{N}$, y que, por tanto, las clases de equivalencia son:

$$C(0)=\{0,-1\},\ C(1)=\{1,-2\},\ C(2)=\{2,-3\},\ C(3)=\{3,-4\},\ \ldots$$

c) El conjunto cociente es, por tanto:

$$\frac{\boldsymbol{Z}}{R}\equiv\{C(0),\ C(1),\ C(2),\ C(3),\ \ldots\}$$

7. Si sobre el conjunto $\boldsymbol{R}^2$, $(x,y)\,R\,(z,t)$ significa $x+t=y+z$. Demostrar que R es una relación de equivalencia.

Solución:

1.° $(\forall (x,y))$: $x+y=y+x \Longrightarrow (x,y)\,R\,(x,y)$.

2.° $(x,y)R\,(z,t) \Longrightarrow x+t=y+z \Longrightarrow z+y=t+x \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (z,t)\,R\,(x,y)$.

3.° $(x,y)\,R\,(z,t)$ y $(z,t)\,R\,(u,v) \Longrightarrow x+t=y+z$,
$z+v=t+u \Longrightarrow x+t+z+v=y+z+t+u \Longrightarrow$
$x+v=y+u \Longrightarrow (x,y)\,R\,(u,v)$.

8. Averiguar cuáles de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva poseen las relaciones siguientes: *a)* «es madre de», para personas; *b)* «es de la misma longitud que», para segmentos; *c)* «no es igual a», para números.

Solución:

a) Ninguna.

b) Las tres, y, por tanto, es una relación de equivalencia.

c) Sólo posee la propiedad simétrica.

9. Si sobre el conjunto de los números enteros $x\,R\,y$ significa $x-y=$número impar. Se pide: *a)* Averiguar cuáles de las propiedades de las relaciones de equivalencia verifica R, y *b)* ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución:

a) 1.° *Reflexiva.* No la verifica, pues:

$$x\,R\,x = x - x = 0 = \text{número par};$$

o sea:

$$\text{no } x\,R\,x.$$

2.° *Simétrica.* Sí la verifica, pues:

$$x-y=\text{número impar} \Longrightarrow y-x=\text{número impar};$$

o sea:

$$x\,R\,y \Longrightarrow y\,R\,x.$$

3.° *Transitiva.* No la verifica, pues:

$$x-y=\text{número impar,}$$
$$y-z=\text{número impar} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (x-y)+(y-z)=\text{número par} \Longrightarrow (x-z)=\text{número par};$$

o sea:

$$x\,R\,y \;\text{ e }\; y\,R\,z \;\text{ no implica }\; x\,R\,z.$$

b) R no es una relación de equivalencia, pues basta que no verifique una de las propiedades anteriores para que no lo sea.

10. En el conjunto de los números naturales se define una relación R de la forma siguiente:

$$x\,R\,y \quad \text{significa} \quad E(\sqrt{x})=E(\sqrt{y}).$$

Se pide: *a)* Probar que R es una relación de equivalencia. *b)* Hallar las clases de equivalencia. *c)* Hallar el conjunto cociente.

Solución:

a) 1.° *Reflexiva.* Sí la verifica, pues:

$$E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{x}) \Longrightarrow x \, R \, x.$$

2.° *Simétrica.* Sí la verifica, pues:

$$E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{y}) \Longrightarrow E(\sqrt{y}) = E(\sqrt{x});$$

o sea:

$$x \, R \, y \Longrightarrow y \, R \, x.$$

3.° *Transitiva.* Sí la verifica, pues:

$$\begin{aligned} &E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{y}), \\ &E(\sqrt{y}) = E(\sqrt{z}) \Longrightarrow E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{z}); \end{aligned}$$

o sea:

$$x \, R \, y \quad \text{e} \quad y \, R \, z \Longrightarrow x \, R \, z.$$

Por tanto, R es una relación de equivalencia.

b) Como uno de los conjuntos completos de elementos de $\boldsymbol{N}^*$, dos a dos no equivalentes, es $\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$, o sea: $\{1, 4, 9, \ldots\}$, las clases de equivalencia son:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{C}(1) \equiv \{1, 2, 3\}, \\ &\boldsymbol{C}(4) \equiv \{4, 5, 6, 7, 8\}, \\ &\boldsymbol{C}(9) \equiv \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}, \\ &\ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \end{aligned}$$

c) El conjunto cociente es, por tanto:

$$\frac{\boldsymbol{N}^*}{R} \equiv \{\boldsymbol{C}(1), \boldsymbol{C}(4), \boldsymbol{C}(9), \ldots\}$$

11. Probar que la relación de inclusión entre conjuntos es una relación de orden parcial.

Solución:

Si $A < B$ significa $A \subseteq B$, se tiene:

1.° $A \subseteq A$ (4.(1)), o sea: $A < A$ Reflexiva.

2.° $A \subseteq B$ y $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$ (4.(2)), o sea:

$A < B$ y $B < A \Longrightarrow A = B$ Antisimétrica.

3.° $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$ (4.(3)), o sea:

$A < B$ y $B < C \Longrightarrow A < C$ Transitiva.

La relación $<$ es de orden parcial, puesto que hay conjuntos que no son comparables, como, por ejemplo, $\{1, 3, 5\}$ y $\{2, 4, 6\}$.

12. Probar que en el conjunto de los números naturales la relación «x divide exactamente a y» es una relación de orden parcial.

Solución:

Si $x < y$ significa $y = \dot{x}$, se tiene:

1.° $x = \dot{x}$, o sea, $x < x$. Reflexiva.

2.° $y = \dot{x}$ y $x = \dot{y} \Longrightarrow y = x \cdot c,\ x = y \cdot c' \Longrightarrow y \cdot x = x \cdot y \cdot c \cdot c' \Longrightarrow$
$\Longrightarrow 1 = c \cdot c' \Longrightarrow c = c' = 1 \Longrightarrow y = x$, o sea:

$x < y$ e $y < x \Longrightarrow x = y$ Antisimétrica.

3.° $y = \dot{x}$ y $z = \dot{y} \Longrightarrow y = x \cdot c,\ z = y \cdot c' \Longrightarrow y \cdot z = x \cdot y \cdot c \cdot c' \Longrightarrow$
$\Longrightarrow z = x \cdot (c \cdot c') \Longrightarrow z = \dot{x}$, o sea:

$x < y$ e $y < z \Longrightarrow x < z$ Transitiva.

La relación $<$ es de orden parcial, puesto que hay elementos de N^* que no son comparables, como, por ejemplo, el 5 y el 7.

13. En el campo de los números complejos se define una relación $<$ en la forma siguiente:

$$a + bi < c + di \iff a \leqslant c \text{ y } b \leqslant d$$

Probar que $<$ es una relación de orden parcial.

Solución:

1.°

$$a=a \text{ y } b=b \Longrightarrow a+bi \prec a+bi. \qquad \text{Reflexiva.}$$

2.°

$$\begin{aligned} &a+bi \prec c+di \text{ y } c+di \prec a+bi \Longrightarrow a \leqslant c,\ b \leqslant a; \\ &c \leqslant a,\ d \leqslant b \Longrightarrow a=c, \\ &b=d \Longrightarrow a+bi=c+di. \qquad \text{Antisimétrica.} \end{aligned}$$

3.°

$$\begin{aligned} &a+bi \prec c+di \text{ y } c+di \prec e+fi \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow a \leqslant c,\ b \leqslant d \text{ y } c \leqslant e,\ d \leqslant f \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow a \leqslant e,\ b \leqslant f \Longrightarrow a+bi \prec e+fi. \qquad \text{Transitiva.} \end{aligned}$$

La relación $\prec$ es de orden parcial, puesto que hay elementos de $\boldsymbol{C}$ que no son comparables, como, por ejemplo, $3+5i$ y $4+2i$.

14. En el campo de los números enteros se define una relación R en la forma siguiente:

$$x\, R\, y \qquad \text{significa} \qquad x < y$$

Probar que R no es una relación de orden.

Solución:

1.° La relación R no es reflexiva, puesto que $x \nless x$, o sea:

$$\text{no } x\, R\, x$$

2.° Tampoco R posee la propiedad antisimétrica, puesto que no puede ser simultáneamente $x<y$ e $y<x$, o sea:

$$\text{no puede ser simultáneamente } x\, R\, y \text{ e } y\, R\, x$$

3.° Aunque R posee la propiedad transitiva, puesto que $x<y$ e $y<z \Longrightarrow x<z$, o sea:

$$x\, R\, y \text{ e } y\, R\, z \Longrightarrow x\, R\, z.$$

Como R sólo tiene la propiedad (28.(3)), no es una relación de orden.

15. Sobre el campo de los números enteros se define una relación $<$ en la forma siguiente:

$$x < y \quad \text{significa} \quad y = x + z, \quad \text{siendo} \quad z \in N.$$

Probar que $<$ es una relación de orden total.

Solución:

1.° $(\forall x)$: $\quad x = x + 0 \Longrightarrow x R x \quad$ *Reflexiva.*

2.° $y = x + z,\ x = y + z' \Longrightarrow z = z' = 0 \Longrightarrow x = y$, o sea:

$$x < y \ \text{ e } \ y < x \Longrightarrow x = y \qquad \textit{Antisimétrica.}$$

3.° $y = x + u,\ z = y + v \Longrightarrow z = x + (u + v)$, o sea:

$$x < y \ \text{ e } \ y < z \Longrightarrow x < z \qquad \textit{Transitiva.}$$

Por otra parte, si x e y son dos elementos cualesquiera de $\mathbf{Z}$, una de las diferencias $x - y$, o bien $y - x$, será positiva o nula, si es, por ejemplo, $x - y = z$, siendo $z \in N$, se tendrá $x = y + z$, es decir, $y < x$.

Si la diferencia positiva o nula hubiera sido la $y - x$, análogamente se tendría $x < y$.

Luego en todo caso, para todo par (x, y) de elementos de $\mathbf{Z}$, o $x < y$, o bien $y < x$; por tanto, todos los elementos de $\mathbf{Z}$ son dos a dos comparables, con lo que queda probado definitivamente que $<$ es una relación de orden total.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{m, n\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{p, q\}$. Hallar:

a) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$; *c)* $\boldsymbol{B}^2$; *e)* $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$;

b) $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$; *d)* $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$; *f)* $\boldsymbol{C}^3$.

2. Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{2, 3\}$. Hallar:

a) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$; *d)* $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}$; *g)* $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}$;

b) $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$; *e)* $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}$; *h)* $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}$.

c) $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\} \times \boldsymbol{B}$; *f)* $\boldsymbol{B}^2$;

3. Si $\boldsymbol{A}$ tiene n elementos y $\boldsymbol{B}$ tiene m elementos, probar que $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ tiene $n \cdot m$ elementos.

4. Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{m, n\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{2, n, p\}$. Hallar:

a) $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})$; *c)* $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})$; *e)* $\boldsymbol{A} \times \{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$;

b) $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$; *d)* $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$; *f)* $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\} \times \boldsymbol{C}$.

5. Representar gráficamente el producto cartesiano $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ en los casos que a continuación se indican:

a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{2, 4, 5\}$;

b) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{R},\ 2 \leqslant x \leqslant 5\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{y | y \in \boldsymbol{R},\ 2 \leqslant y \leqslant 4\}$;

c) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{R},\ 1 < x \leqslant 3\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{y | y \in \boldsymbol{R},\ 2 \leqslant y < 4\}$;

d) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{3\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{y | y \in \boldsymbol{R},\ 2 < y < 4\}$;

e) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{R},\ 2 < x < 4\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{y | y \in \boldsymbol{R},\ 1 \leqslant x \leqslant 3\}$;

f) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{R},\ 1 < x < 2\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{y | y \in \boldsymbol{R},\ 2 < y < 5\}$;

g) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{2\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{3\}$.

6. Representar gráficamente el producto cartesiano $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ en los casos siguientes:

a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{2, 3, 4\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{4, 5\}$;

b) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{x|x \in \boldsymbol{R},\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{y|y \in \boldsymbol{R},\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{z|z \in \boldsymbol{R},\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$;

c) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{x|x \in \boldsymbol{R},\ 1 \leqslant x \leqslant 3\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{2\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{z|z \in \boldsymbol{R},\ 2 \leqslant z \leqslant 5\}$;

d) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{2\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{y|y \in \boldsymbol{R},\ 2 \leqslant y \leqslant 4\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{4\}$;

e) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{2\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{3\}$ y $\boldsymbol{C} \equiv \{5\}$.

7. Representar gráficamente el producto cartesiano $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ en los casos siguientes:

a) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{(x, y)|(x, y) \in \boldsymbol{R}^2,\ 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0\}$ y $\boldsymbol{B} \equiv \{z|z \in \boldsymbol{R},\ 4 \leqslant z \leqslant 8\}$;

b) Si $\boldsymbol{A} \equiv \{(x, y)|(x, y) \in \boldsymbol{R}^2,\ 9x^2 + 4y^2 - 36 < 0\}$ $\boldsymbol{B} \equiv \{z|z \in \boldsymbol{R},\ 4 < z < 8\}$.

8. En el conjunto de los números naturales se define una relación R en la forma siguiente: $x\,R\,y$ significa que, escritos x e y en el sistema decimal, tienen iguales las últimas cifras. Se pide: *a)* Probar que R es una relación de equivalencia. *b)* Hallar las clases de equivalencia. *c)* Hallar el conjunto cociente.

9. Si $x\,R\,y$ significa $x = c \cdot y$, donde $c \neq 0$. Probar si R es, o no, relación de equivalencia en los casos siguientes: *a)* En el conjunto de los números enteros. *b)* En el conjunto de los números racionales.

Solución:

a) No; *b)* Sí.

10. $\boldsymbol{A}$ es un conjunto de fichas de colores: rojo, azul, blanco, verde, naranja. En $\boldsymbol{A}$ se define la relación R del modo siguiente: Si x e y son dos fichas se escribe $x\,R\,y$ cuando x e y tienen el mismo color. Probar que R es una relación de equivalencia. *a)* ¿Qué clasificación produce R en $\boldsymbol{A}$? ¿Cuántas clases tiene la clasificación? *b)* Si $\boldsymbol{A}_r$, $\boldsymbol{A}_a$, $\boldsymbol{A}_b$, $\boldsymbol{A}_v$ y $\boldsymbol{A}_n$ son los subconjuntos de $\boldsymbol{A}$ formados por las fichas de colores rojo, azul, blanco, verde y naranja, respectivamente. ¿Es $\{\boldsymbol{A}_r, \boldsymbol{A}_a, \boldsymbol{A}_b, \boldsymbol{A}_v, \boldsymbol{A}_n\}$ una clasificación de $\boldsymbol{A}$? *c)* Se numeran correlativamente, a partir de 1, las fichas de cada una de las clases $\boldsymbol{A}_r$,

A_a, A_b, A_v, A_n Si representamos con A_i el subconjunto formado por todas las fichas que tienen el mismo número i. ¿Es $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ una partición de A? Si $x\,R\,y$ significa que a las fichas x e y les ha correspondido el mismo número, ¿es R una relación de equivalencia? ¿Cuáles son las clases de equivalencia?

Solución:

a) R clasifica las fichas de A por colores; cinco.

b) Sí.

c) Sí; sí; $C(1)$, $C(2)$, $C(3)$, $C(4,)$ y $C(5)$.

11. Dado un conjunto no vacío A, el conjunto de sus partes $P(A)$ y un subconjunto fijo B de A. Si en las anteriores hipótesis,

$$X\,R\,Y \quad \text{significa} \quad X \cap B = Y \cap B$$

se pide demostrar que R es una relación de equivalencia.

NOTA. Decimos que una *relación R* es *circular* si

$$x\,R\,y \quad \text{e} \quad y\,R\,z \Longrightarrow z\,R\,x$$

12. Demostrar que si una relación es circular y reflexiva es de equivalencia.

13. En el conjunto de los números naturales definimos una relación R en la forma siguiente:

$x\,R\,y$ significa que x e y tienen igual paridad.

Se pide: *a)* Probar que R es una relación de equivalencia. *b)* Hallar las clases de equivalencia. *c)* Hallar el conjunto cociente.

14. ¿Cuáles de las siguientes son relaciones de equivalencia?

a) «Tiene el mismo radio que», para el conjunto de todas las circunferencias del plano.

b) «Es el cuadrado de», para el conjunto de los números naturales.

c) «Tiene el mismo número de vértices que», para el conjunto de todos los polígonos del plano.

d) «Tiene el mismo apellido que», para el conjunto de todas las personas vivas.

15. Dado el conjunto de números

$$A \equiv \left\{ x_n | x_n = \frac{n+1}{n},\ n \in N^* \right\}$$

En el que «$x_n < x_m$» significa «$n \leqslant m$», se pide:

a) ¿Se trata de un conjunto acotado?

b) ¿Admite extremos?

c) ¿Tiene elementos máximo y mínimo?

16. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos están bien ordenados respecto de la relación $\leqslant$?:

a) El conjunto de los enteros positivos pares.

b) El conjunto de los enteros negativos pares.

c) El conjunto de los enteros mayores que -7.

d) El conjunto de los enteros impares mayores que 100.

e) El conjunto de los números racionales.

17. ¿En el conjunto de los números enteros, la relación $x < |y|$ verifica alguna de las propiedades reflexiva, simétrica o transitiva?

18. ¿Se puede definir una relación de orden total entre los puntos de una circunferencia? Caso afirmativo, definirla.

Solución:

Sí.

19. ¿Es bien ordenado, respecto de la relación $\leqslant$, el siguiente conjunto?:

$$A \equiv \left\{ x | x = \frac{n}{n+1},\ n \in N^* \right\}$$

Solución:

Sí.

20. Si sobre el conjunto de los números racionales

$$x < y \quad \text{significa} \quad x \leqslant y$$

y

$$A \equiv \{ x | x \in Q,\ 2 \leqslant x < 3 \}$$

es un subconjunto de $\boldsymbol{Q}$; se desea saber lo siguiente sobre el conjunto $\boldsymbol{A}$

1.° ¿Es totalmente ordenado con respecto a $<$?
2.° El conjunto de cotas superiores.
3.° El conjunto de cotas inferiores.
4.° Los extremos.
5.° Los elementos máximo y mínimo.
6.° ¿Está bien ordenado?

4
aplicaciones

31. Aplicaciones

Si dados los conjuntos **X**, ***B*** y establecida una relación R entre los elementos de dichos conjuntos, para todo $x \in \mathbf{X}$ existe, en *correspondencia* con él, un $y \in \boldsymbol{B}$, y sólo uno, que verifique $x R y$, diremos que la relación R es una *aplicación de* **X** *en* ***B***.

En particular, cuando **X** y ***B*** son conjuntos de números, diremos que R es una *función de* **X** *en* ***B***.

Aun cuando la noción de aplicación es mucho más amplia que la análoga de función, desde ahora en adelante, salvo que explícitamente se advierta lo contrario, las palabras «aplicación» y «función» las usaremos indistintamente con igual significado.

La regla, ley o procedimiento que nos permite encontrar la y que corresponde a cada x se llama *operador* de la aplicación; se suele designar con una de las letras f, F, φ, ...

Si la letra empleada es la f, se escribe $y=f(x)$.

Es decir, si se verifican las hipótesis dadas al principio, en lugar de poner $x R y$, escribiremos $y=f(x)$.

Si $y=f(x)$, y, o su igual $f(x)$, es la *imagen* o *transformada* del elemento x por efecto del operador f; inversamente, x es la *variable* o *argumento* de la función.

Se expresa que $f(x)$ es la imagen de x con la notación:

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

y se dice que la aplicación f *transforma* x en $f(x)$, o bien que la aplicación f da $f(x)$ como imagen de x.

X es el *conjunto de definición* o *dominio* de la aplicación f.(22).

El *recorrido, rango, transformada* o *imagen* del dominio **X** por la aplicación f es el conjunto **Y** de las imágenes de todos los elementos de **X**.(22).

B es el *conjunto de valores*.

Como, en general, el rango $\boldsymbol{Y}$ de la aplicación f es un subconjunto de $\boldsymbol{B}$, se tiene:

$$\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{B}$$

Si la imagen de $\boldsymbol{X}$ por la aplicación f la representamos por $f(\boldsymbol{X})$, se tendrá:

$$\boldsymbol{Y} = f(\boldsymbol{X}) \quad \text{o bien} \quad \boldsymbol{X} \xrightarrow{f} f(\boldsymbol{X})$$

Entre las aplicaciones de un conjunto $\boldsymbol{X}$ en sí mismo, existe una, en particular, que hace corresponder a todo $x \in \boldsymbol{X}$ el mismo elemento x. Es la *aplicación identidad* y viene determinada por la relación funcional $y = x$.

Si el operador de la aplicación identidad lo representamos con la letra I, se tendrá:

$$y = I(x).$$

Si f es una aplicación de $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{B}$, diremos que $x \in \boldsymbol{X}$ es un *elemento invariante* en la aplicación, si $f(x) = x$.

Propiedad. Si $f(x_1) \neq f(x_2)$, tendrá que ser $x_1 \neq x_2$, puesto que si fuera $x_1 = x_2$, resultaría que a un elemento de $\boldsymbol{X}$ corresponderían dos imágenes distintas en contra de ser f una aplicación.

Restricción de una aplicación. Si $\boldsymbol{X}_1 \subset \boldsymbol{X}$, como todo $x \in \boldsymbol{X}_1$ también pertenece a $\boldsymbol{X}$, la aplicación f le hará corresponder una imagen, y sólo una, en $\boldsymbol{B}$ y, por tanto, toda aplicación de $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{B}$ determina una aplicación de $\boldsymbol{X}_1$ en $\boldsymbol{B}$ que se llama *restricción de f a $\boldsymbol{X}_1$* o *aplicación restringida* de f a $\boldsymbol{X}_1$.

El rango de la aplicación restringida es $\boldsymbol{Y}_1 = f(\boldsymbol{X}_1)$.

Diagrama de una aplicación. Si f es una aplicación de dominio $\boldsymbol{X}$ y conjunto de valores $\boldsymbol{B}$, a cada $x \in \boldsymbol{X}$ le corresponderá un $y \in \boldsymbol{B}$, y sólo uno; por tanto, la aplicación f será (22) el conjunto

$$\boldsymbol{F} \equiv \{(x, y) | (x, y) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{B},\ y = f(x)\}$$

Por supuesto,

$$\boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{B}.$$

En particular, si $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{B}$ son conjuntos lineales y los representamos por puntos de los ejes de un sistema cartesiano, y cada par lo representamos por el punto que tiene por coordenadas los componentes de dicho par, la aplicación tendrá como representación gráfica un conjunto de puntos al que llamaremos *gráfica* o *diagrama de la aplicación f*.

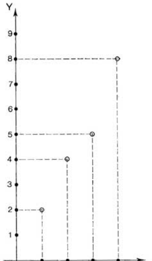
Con objeto de simplificar el lenguaje, también llamaremos gráfica de la aplicación f, al propio conjunto $\boldsymbol{F}$.

Ejemplos:

a) Si $\boldsymbol{X} \equiv \{1, 2, 3, 4\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y f viene definida por

$$f: \begin{array}{l} 1 \longrightarrow f(1)=2 \\ 2 \longrightarrow f(2)=4 \\ 3 \longrightarrow f(3)=5 \\ 4 \longrightarrow f(4)=8 \end{array}$$

La gráfica de la aplicación f será, pues:



El dominio de f es $\boldsymbol{X} \equiv \{1, 2, 3, 4\}$, el conjunto de valores $\boldsymbol{B} \equiv \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y su rango $\boldsymbol{Y} \equiv \{2, 4, 5, 8\}$.

OBSERVACIONES:

1.° $Y \subset B$.

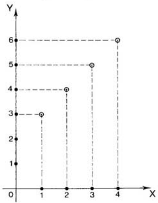
2.° A todo $x \in X$ corresponde un $y \in B$ y sólo uno.

3.° Todo $y \in Y$ es imagen de un $x \in X$ y de sólo uno.

b) Si $X \equiv \{1, 2, 3, 4\}$, $B \equiv \{3, 4, 5, 6\}$ y f viene definida por:

$$f: \begin{array}{l} 1 \longrightarrow f(1)=3 \\ 2 \longrightarrow f(2)=4 \\ 3 \longrightarrow f(3)=5 \\ 4 \longrightarrow f(4)=6 \end{array}$$

La gráfica de la aplicación f es:



El dominio de f es $X \equiv \{1, 2, 3, 4\}$, el conjunto de valores $B \equiv \{3, 4, 5, 6\}$ y su rango $Y \equiv \{3, 4, 5, 6\}$.

OBSERVACIONES:

1.° $Y = B$.

2.° A todo $x \in X$ corresponde un $y \in B$ y sólo uno.

3.° Todo $y \in B$ es imagen de un $x \in X$ y de sólo uno.

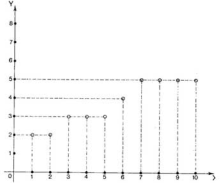
c) Si $\boldsymbol{X} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$$\boldsymbol{B} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

y f viene dada por

$$f: \begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & f(1)=2 \\ 2 & \longrightarrow & f(2)=2 \\ 3 & \longrightarrow & f(3)=3 \\ 4 & \longrightarrow & f(4)=3 \\ 5 & \longrightarrow & f(5)=3 \\ 6 & \longrightarrow & f(6)=4 \\ 7 & \longrightarrow & f(7)=5 \\ 8 & \longrightarrow & f(8)=5 \\ 9 & \longrightarrow & f(9)=5 \\ 10 & \longrightarrow & f(10)=5 \end{array}$$

La gráfica de la aplicación f es:

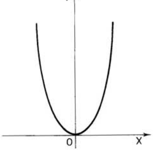


OBSERVACIONES:

1.° $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{B}$.

2.° A todo $x \in \boldsymbol{X}$ corresponde un $y \in \boldsymbol{Y}$, y sólo uno; pero, en cambio, no todo $y \in \boldsymbol{Y}$ es transformada de un sólo $x \in \boldsymbol{X}$.

d) Si $X = B = R$ y $f(x) = x^2$, la gráfica de la aplicación f es



OBSERVACIONES:

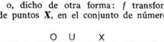
1.° El rango de la aplicación f es

$$Y \equiv \{y | y \in R,\ y \geqslant 0\}$$

2.° $Y \subset B$.

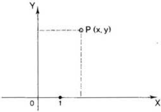
3.° A todo $x \in X$ corresponde un $y \in Y$, y sólo uno; pero, en cambio, todo $y \in Y$ (salvo $y = 0$) es transformada de dos $x \in X$.

e) Si $X \equiv \{X | X$ es un punto cualquiera de un eje real$\}$, $B = R$ y f el operador que hace corresponder a cada punto X del eje, su abscisa x; f es una aplicación (en sentido estricto) del conjunto X, de los puntos de una recta (serie rectilínea), en el conjunto R de los números reales; o, dicho de otra forma: f transforma el conjunto de puntos X, en el conjunto de números reales R.



Es de observar que la transformación no queda determinada mientras no se fijen en la recta el punto origen y el punto unidad.

f) Si $X \equiv \{P|P$ es un punto cualquiera de un plano cartesiano$\}$, $B = R \times R$ el conjunto de todos los pares ordenados de números reales y f el operador que hace corresponder a cada punto P del plano cartesiano, sus coordenadas (x, y); f es una aplicación del conjunto X de los puntos de un plano, en el conjunto de los pares ordenados de números reales.



OBSERVACIONES:

1.° El operador f no queda determinado mientras no se fije el sistema de ejes cartesianos.

2.° f nos transforma el conjunto de puntos de un plano, en el conjunto de pares ordenados de números reales, esto es, en el conjunto C de los números complejos.

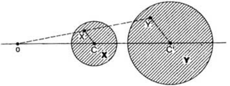
3.° $Y = B$.

g) Si $X \equiv \{X|X$ es un punto cualquiera del círculo $C\}$, $B \equiv \{Y|Y$ es un punto cualquiera del círculo $C'\}$, siendo C y C' dos círculos homotéticos * de centro 0 y razón de homotecia $K = 2$ y, finalmente, f es la construcción geométrica u operador que nos permite encontrar el punto $Y \in B$ que corresponde a cada $X \in X$; f es una

* Dados los conjuntos de puntos X e Y, el punto 0 y el número real $k \neq 0$, diremos que los conjuntos X e Y son *homotéticos* de razón k y centro O, si: 1.°, se puede establecer correspondencia biunívoca entre los puntos de dichos conjuntos, y 2.°, para cada par de puntos correspondientes X e Y, se verifica

$$\frac{\overline{OY}}{\overline{OX}} = k$$

aplicación del conjunto **X**, de los puntos del círculo *C*, en el conjunto **Y** de los puntos del círculo *C'*.



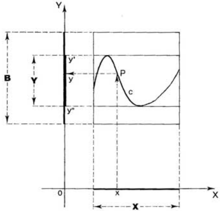
OBSERVACIONES:

1.° El operador *f* no queda determinado mientras no se fijen los círculos.

2.° *f* nos transforma el conjunto de puntos del círculo *C* en el conjunto de puntos del círculo *C'*.

3.° $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}$.

h) En la figura adjunta, en la que el dominio, el conjunto de valores y el rango están representados por **X**, **B** e **Y**, respectivamente (intervalos indicados con rayado grueso



en los ejes), y c es una *curva* cualquiera, con la única restricción de que la perpendicular al eje X, trazada por un punto cualquiera $x \in \boldsymbol{X}$, la corte en un solo punto; se puede definir un operador f en la forma siguiente: asociaremos a cada $x \in \boldsymbol{X}$ el punto $y \in \boldsymbol{Y}$, que se obtiene levantando por x la perpendicular al eje X hasta el punto P de intersección con c, para después hallar el pie y de la perpendicular trazada desde P al eje Y.

El operador f nos permite hallar sin ambigüedad el $y \in \boldsymbol{Y}$ que corresponde a cada $x \in \boldsymbol{X}$; f es, pues, una aplicación del conjunto de puntos $\boldsymbol{X}$ en el conjunto $\boldsymbol{B}$.

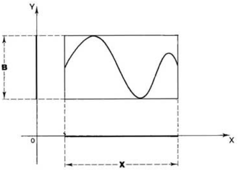
OBSERVACIONES:

1.° $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{B}$.

2.° A todo $x \in \boldsymbol{X}$ corresponde un $y \in \boldsymbol{Y}$, y sólo uno; en cambio, cada $y \in \boldsymbol{Y}$ es imagen de varios $x \in \boldsymbol{X}$, salvo y' e y'', que son imágenes de un solo $x \in \boldsymbol{X}$.

Aplicación sobreyectiva. Si f es una aplicación de dominio $\boldsymbol{X}$ y conjunto de valores $\boldsymbol{B}$, se dice que f es una *aplicación sobreyectiva de* $\boldsymbol{X}$ *sobre* $\boldsymbol{B}$, si el rango y el conjunto de valores de f coinciden, es decir, si

$$f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{B}$$

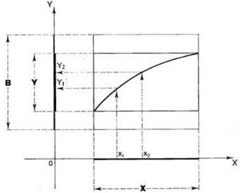


La igualdad anterior nos indica que la aplicación f transforma el dominio $\boldsymbol{X}$ en el conjunto de valores $\boldsymbol{B}$.

Puesto que las imágenes de los elementos de $\boldsymbol{X}$ cubren totalmente a $\boldsymbol{B}$, diremos también que f es una *aplicación exhaustiva de* $\boldsymbol{X}$ *sobre* $\boldsymbol{B}$.

Obsérvese que hemos sustituido la preposición «en» utilizada en la definición general de la aplicación, por la preposición «sobre», que usaremos única y exclusivamente cuando se trate de aplicaciones sobreyectivas.

Aplicación inyectiva. Si f es una aplicación de dominio $\boldsymbol{X}$, conjunto de valores $\boldsymbol{B}$ y rango $\boldsymbol{Y}$, se dice que f es una *aplicación inyectiva de* $\boldsymbol{X}$ *en* $\boldsymbol{B}$, cuando a cada dos elementos distintos de $\boldsymbol{X}$ corresponden imágenes también distintas en $\boldsymbol{Y}$.



Por tanto, f es inyectiva si

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

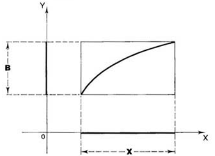
CONSECUENCIA. Todo $y \in \boldsymbol{Y}$ debe ser imagen de un $x \in \boldsymbol{X}$, y sólo de uno, pues si fuera imagen también de otro distinto $x' \in \boldsymbol{X}$, como f es inyectiva, al ser $x \neq x'$ será $f(x) \neq f(x')$, esto es, $y \neq y$, lo cual es absurdo.

Aplicación biyectiva. Se dice que una aplicación f, de dominio $\boldsymbol{X}$ y campo de valores $\boldsymbol{B}$, es *biyectiva*, si es sobreyectiva e inyectiva simultáneamente; es decir, f es una aplicación biyectiva de $\boldsymbol{X}$ sobre $\boldsymbol{B}$ si

$$f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{B} \quad \text{y} \quad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

De las definiciones de aplicación inyectiva y sobreyectiva se sigue que:

Si f es una aplicación inyectiva de $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{Y}$ es su rango, será sobreyectiva de $\boldsymbol{X}$ sobre $\boldsymbol{Y}$ y, por tanto, f será una aplicación biyectiva de $\boldsymbol{X}$ sobre $\boldsymbol{Y}$.



32. Aplicaciones inversas

Si f es una aplicación inyectiva de dominio $\boldsymbol{X}$, campo de valores $\boldsymbol{B}$ y rango $\boldsymbol{Y}$, a cada $x \in \boldsymbol{X}$, la aplicación f hace corresponder (o nos permite asociar) un elemento $y \in \boldsymbol{Y}$, y sólo uno. Diremos que f determina (o es) una *correspondencia unívoca* entre los elementos de los conjuntos $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$.

Recíprocamente, todo $y \in \boldsymbol{Y}$ es correspondiente (o imagen) de un $x \in \boldsymbol{X}$, y sólo uno; luego, en definitiva, f determina (o es) una *correspondencia biunívoca* entre los elementos de $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$.

Por tanto, la aplicación f determina otra «de sentido contrario» que nos permite afirmar que a todo $y \in \boldsymbol{Y}$ corresponde un $x \in \boldsymbol{X}$, y sólo uno.

Se llama *función* o *aplicación inversa* de f y se designa con f^{-1}, a la regla, ley o procedimiento que nos permite encontrar el $x \in \boldsymbol{X}$ que corresponde a cada $y \in \boldsymbol{Y}$.

Se tiene, por tanto:

$$y=f(x) \Longrightarrow x=f^{-1}(y)$$

Puesto que el dominio y rango de f son $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, respectivamente, f^{-1} tendrá $\boldsymbol{Y}$ por dominio y $\boldsymbol{X}$ como rango, luego

$$\boldsymbol{X} \xrightarrow{f} f(\boldsymbol{X}) \iff \boldsymbol{Y} \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(\boldsymbol{Y})$$

En particular, si f es biyectiva, seguirán siendo válidas las conclusiones obtenidas y, como en este caso $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}$, bastará sustituir la $\boldsymbol{Y}$ por la $\boldsymbol{B}$ y, además, la preposición «en» por la «sobre», luego:

Si f es una aplicación biyectiva de $\boldsymbol{X}$ sobre $\boldsymbol{B}$, f^{-1} es una aplicación biyectiva de $\boldsymbol{B}$ sobre $\boldsymbol{X}$.

Por tanto, si f es biyectiva, se tiene:

$$\boldsymbol{X} \xrightarrow{f} f(\boldsymbol{X}) \iff \boldsymbol{B} \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(\boldsymbol{B})$$

Si f es una aplicación biyectiva de $\boldsymbol{X}$ sobre $\boldsymbol{B}$, o lo que es lo mismo, si entre los elementos de los conjuntos $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{B}$ existe una correspondencia biunívoca, diremos que los repetidos conjuntos son *equipotenciales* o que tienen igual *potencia.*

Conjuntos inyectables y biyectables. Si dados los conjuntos (finitos o infinitos) $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, hubiera posibilidad de establecer una correspondencia unívoca entre los elementos del conjunto $\boldsymbol{A}$ con los del conjunto $\boldsymbol{B}$, diremos que $\boldsymbol{A}$ es *inyectable en* $\boldsymbol{B}$.

Si la correspondencia es biunívoca, se dice que $\boldsymbol{A}$ es *biyectable sobre* $\boldsymbol{B}$.

Es inmediato que si $\boldsymbol{A}$ es inyectable en $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B}$ es inyectable en $\boldsymbol{A}$, entonces cada uno de los conjuntos es biyectable en el otro.

Ejemplos:

Averiguar si las aplicaciones siguientes tienen inversa y, en caso afirmativo, hallarla:

a) $f(x)=x+5$, siendo: $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{R}$.

b) $f(x)=x^2$, siendo

$$X=R, \quad B \equiv \{y | y \in R,\ y \geqslant 0\}.$$

c) $f(x)=2^x$, siendo

$$X=R, \quad B \equiv \{y | y \in R,\ y > 0\}.$$

Soluciones:

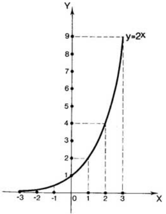
a) De $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow x_1+5 \neq x_2+5 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, luego f es inyectiva y, por tanto, tiene inversa.

La aplicación inversa de f viene dada por $f^{-1}(y)=y-5$.

Por otra parte, como $Y=B$, f es sobreyectiva y, por tanto, biyectiva, de dominio $X=R$ y rango $Y=R$, f^{-1} es también biyectiva de dominio $Y=R$ y rango $X=R$.

b) Como $x_1 \neq x_2$ no implica necesariamente $f(x_1) \neq f(x_2)$ (compruébese para parejas de valores de x de igual valor absoluto pero distinto signo), luego f no es inyectiva y, por tanto, no tiene aplicación inversa.

c) De $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow 2^{x_1} \neq 2^{x_2} \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, luego f es inyectiva y, por tanto, tiene inversa. La aplicación inversa de f viene dada por $f^{-1}(y)=\log_2 y$.



Por otra parte, como $Y = B$, f es sobreyectiva y, por tanto, biyectiva.

Como f es sobreyectiva de dominio $X = R$ y rango $Y \equiv \{y | y \in R,\ y > 0\}$, la inversa f^{-1} será también sobreyectiva de dominio $Y \equiv \{y | y \in R,\ y > 0\}$ y de rango $X = R$.

OBSERVACIONES:

1.° La aplicación $f(x) = 2^x$ transforma el conjunto de números reales R (o el conjunto de puntos de una serie rectilínea) en el conjunto de números reales

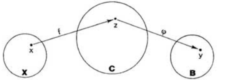
$$Y \equiv \{y | y \in R,\ y > 0\}$$

(o en el conjunto de puntos de una semirrecta) e inversamente, la aplicación f^{-1} transforma el conjunto de números reales $Y \equiv \{y | y \in R,\ y > 0\}$ (o conjunto de puntos de una semirrecta) en el conjunto de números reales R (o conjunto de puntos de una serie rectilínea).

2.° El conjunto de puntos de una serie rectilínea tiene igual potencia que el conjunto de puntos de una semirrecta.

33. Producto de aplicaciones

Si f es una aplicación del conjunto X en el conjunto C y φ es una aplicación del conjunto C en el conjunto B. A cada $x \in X$, f le hará corresponder una imagen $z = f(x)$ en C, y φ, a su vez, hará corresponder a z una imagen $y = \varphi(z)$ en B; luego, en definitiva, a cada $x \in X$ le corresponde (o le podemos asociar) una imagen $y \in B$, y sólo una.



Por tanto:

$$f(X) \subseteq C \quad \text{y} \quad \varphi(C) \subseteq B$$

donde $Y \subseteq B$.

El paso directo de x a y determina una aplicación F que se llama *compuesta* o *producto* de las aplicaciones f y φ, es decir:

$$\text{Si} \quad \begin{cases} y = \varphi(z) \\ z = f(x) \end{cases}$$

para obtener la aplicación producto F, que nos transforma directamente el conjunto X en el Y, bastará eliminar z entre las ecuaciones anteriores; tendremos así:

$$y = \varphi[f(x)] = F(x)$$

A pesar de que la igualdad anterior nos indica que la φ actúa sobre el resultado de haber actuado la f, esto es, que la f actúa primero y la φ después; representaremos el producto F, de las aplicaciones f y φ, con la notación $\varphi \circ f$, es decir:

$$\varphi[f(x)] = [\varphi \circ f](x)$$

Por razones obvias, el símbolo $\varphi \circ f$ lo leeremos de derecha a izquierda, o sea: «f por φ».

Ejemplos:

a) Hallar $[\varphi \circ f](x)$, siendo:

$$X = C = B = N^*,$$

f = tres veces la variable independiente menos dos y φ = cuatro veces la variable independiente más uno; es decir:

$$\begin{cases} y = 4z + 1 \\ z = 3x - 2 \end{cases}, \quad \text{en símbolos} \quad \begin{cases} y = \varphi(z) \\ z = f(x) \end{cases}$$

Componiendo las aplicaciones en el orden pedido se tiene:

$$y = 4(3x - 2) + 1 = 12x - 7, \quad F_1(x) = 12x - 7$$

En símbolos, se tiene:

$$F_1(x)=\varphi[f(x)], \qquad \text{de donde,} \qquad F_1=\varphi\circ f.$$

b) Hallar $f\circ\varphi$ en las mismas hipótesis del problema anterior.

Solución:

$$\begin{cases} y=3z-2 \\ z=4x+1 \end{cases}, \qquad \text{en símbolos} \qquad \begin{cases} y=f(z) \\ z=\varphi(x) \end{cases}$$

de donde:

$$y=3(4x+1)-2=12x+1, \qquad F_2(x)=12x+1$$

En símbolos,

$$F_2(x)=f[\varphi(x)], \qquad \text{de donde,} \qquad F_2=f\circ\varphi.$$

Los ejemplos anteriores nos prueban que

$$[\varphi\circ f](x)\neq[f\circ\varphi](x)$$

y que, por tanto:

El producto de aplicaciones no tiene, en general, la propiedad conmutativa, es decir, en general,

$$\varphi\circ f\neq f\circ\varphi$$

En particular, el producto de una aplicación biyectiva f por su inversa f^{-1} transforma el conjunto de partida (el dominio) en sí mismo; dicha aplicación producto es, pues, la aplicación identidad I, luego:

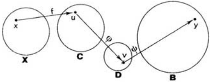
$$f^{-1}\circ f=I$$

Ejemplo:

Las simetrías, traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones nos proporcionan una gran variedad de aplicaciones que se pueden multiplicar.

Propiedad asociativa. Si f es una aplicación del conjunto $\boldsymbol{X}$ sobre el conjunto $\boldsymbol{C}$, φ una aplicación del conjunto $\boldsymbol{C}$ sobre el conjunto $\boldsymbol{D}$ y, finalmente, ψ es una aplicación del conjunto $\boldsymbol{D}$ en el conjunto $\boldsymbol{B}$, vamos a demostrar que:

(1) $$(\psi \circ \varphi) \circ f = \psi \circ (\varphi \circ f)$$



En efecto:

$$x \in \boldsymbol{X} \xrightarrow{f} u \in \boldsymbol{C},$$

y como

$$u \in \boldsymbol{C} \xrightarrow{\psi \circ \varphi} y \in \boldsymbol{B},$$

tendremos:

$$x \in \boldsymbol{X} \xrightarrow{(\psi \circ \varphi) \circ f} y \in \boldsymbol{B}$$

Por otra parte:

$$x \in \boldsymbol{X} \xrightarrow{f} u \in \boldsymbol{C} \xrightarrow{\varphi} v \in \boldsymbol{D},$$

de donde

$$x \in \boldsymbol{X} \xrightarrow{\varphi \circ f} v \in \boldsymbol{D}$$

y como

$$v \in \boldsymbol{D} \xrightarrow{\psi} y \in \boldsymbol{B},$$

tendremos, en definitiva:

$$x \in \boldsymbol{X} \xrightarrow{\psi \circ (\varphi \circ f)} y \in \boldsymbol{B}$$

Por tanto, *el producto de aplicaciones tiene la propiedad asociativa.*

Como se ha demostrado que $(\psi \circ \varphi) \circ f = \psi \circ (\varphi \circ f)$, no habrá lugar a confusión si suprimimos el paréntesis, es decir:

$$(\psi \circ \varphi) \circ f = \psi \circ (\varphi \circ f) = \psi \circ \varphi \circ f$$

Ejemplos:

Si

$$\begin{cases} y = \psi(v) = \sqrt{v^2 + 1} \\ v = \varphi(u) = u^2 \\ u = f(x) = 2x + 3. \end{cases}$$

Hallar:

1.° $[\varphi \circ f](x)$;	4.° $[(\psi \circ \varphi) \circ f](x)$;
2.° $[\psi \circ (\varphi \circ f)](x)$;	5.° $[f \circ \varphi](v)$;
3.° $[\psi \circ \varphi](u)$;	6.° $[\varphi \circ \psi](y)$.

Solución:

1.° $[\varphi \circ f](x) = \varphi[f(x)] = \varphi(2x+3) = (2x+3)^2$;

2.° $[\psi \circ (\varphi \circ f)](x) = \psi\{\varphi[f(x)]\} = \psi[\varphi(2x+3)] =$
$= \psi[(2x+3)^2] = \sqrt{[(2x+3)^2]^2 + 1} = \sqrt{(2x+3)^4 + 1}$;

3.° $[\psi \circ \varphi](u) = \psi[\varphi(u)] = \psi(u^2) = \sqrt{(u^2)^2 + 1} = \sqrt{u^4 + 1}$;

4.° $[(\psi \circ \varphi) \circ f](x) = \psi\{\varphi[f(x)]\} = \psi[\varphi(2x+3)] =$
$= \psi[(2x+3)^2] = \sqrt{[(2x+3)^2]^2 + 1} = \sqrt{(2x+3)^4 + 1}$;

5.° $[f \circ \varphi](v) = f[\varphi(v)] = f(v^2) = 2v^2 + 3$;

6.° $[\varphi \circ \psi](y) = \varphi[\psi(y)] = \varphi(\sqrt{y^2 + 1}) = y^2 + 1$.

34. Cardinal de un conjunto

Si

$$\mathfrak{F} \equiv \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots\}$$

es un conjunto finito o infinito de conjuntos, esto es, una *familia* de conjuntos y $\boldsymbol{M} \, R \, \boldsymbol{P}$ significa «$\boldsymbol{M}$ tiene igual potencia (32) que $\boldsymbol{P}$»,

R es una relación de equivalencia (24). En efecto, es inmediato que R tiene las propiedades siguientes:

1.	$\boldsymbol{M} R \boldsymbol{M}$	Reflexiva.
2.	$\boldsymbol{M} R \boldsymbol{P} \Longrightarrow \boldsymbol{P} R \boldsymbol{M}$	Simétrica.
3.	$\boldsymbol{M} R \boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{P} R \boldsymbol{S} \Longrightarrow \boldsymbol{M} R \boldsymbol{S}$	Transitiva.

Puesto que R es una relación de equivalencia, R determina una partición de $\mathfrak{F}$ en clases de equivalencia (25. Teorema) y un conjunto cociente $\frac{\mathfrak{F}}{R}$. Ahora bien, cada clase de equivalencia del conjunto cociente da lugar a la creación de un ente abstracto (27), luego R da lugar a la creación en $\mathfrak{F}$ de tantos entes abstractos como clases de equivalencia contiene $\frac{\mathfrak{F}}{R}$.

En particular, si $\boldsymbol{M} \in \mathfrak{F}$, llamaremos *número cardinal* de $\boldsymbol{M}$, o simplemente *cardinal* de $\boldsymbol{M}$, al ente abstracto creado para la clase de equivalencia $C(\boldsymbol{M})$.

Por otra parte, como dado un conjunto $\boldsymbol{M} \in \mathfrak{F}$, además de los conjuntos equipotenciales entre sí de $C(\boldsymbol{M})$, existen infinitos otros, no pertenecientes a $\mathfrak{F}$, pero que también son equipotenciales con $\boldsymbol{M}$, por extensión, llamaremos *número cardinal* de $\boldsymbol{M}$, o simplemente *cardinal* de $\boldsymbol{M}$, al ente abstracto creado para la clase de equivalencia formada por $\boldsymbol{M}$ y por todos los conjuntos que son equipotenciales con $\boldsymbol{M}$.

La segunda definición, mucho más general que la primera, tiene sobre ésta la ventaja de desligar el concepto de cardinal de un conjunto de la preexistencia de una familia de conjuntos. El cardinal de un conjunto $\boldsymbol{M}$ lo representaremos con la notación Card $(\boldsymbol{M})$.

Creación del cero y de los números naturales. Si los cardinales de los conjuntos $\{\ \}$, $\{A\}$, $\{A, B\}$, $\{A, B, C\}$, ... los representamos con los símbolos 0, 1, 2, 3, ..., se tendrá:

$$\text{Card}(\{\ \})=0, \quad \text{Card}(\{A\})=1, \quad \text{Card}(\{A, B\})=2,$$
$$\text{Card}(\{A, B, C\})=3, \ \ldots$$

Ejemplo:

Si $\mathfrak{F} \equiv \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{I}\}$, siendo:

$\boldsymbol{A} \equiv \{a, b, c, d\}$, $\boldsymbol{B} \equiv \{e, f\}$, $\boldsymbol{C} \equiv \{g, h, i\}$,
$\boldsymbol{D} \equiv \{j, k\}$, $\boldsymbol{E} \equiv \{l, m, n, o\}$, $\boldsymbol{F} \equiv \{p, q, r\}$,
$\boldsymbol{G} \equiv \{s, t\}$, $\boldsymbol{H} \equiv \{u, v, w, x\}$, e $\boldsymbol{I} \equiv \{y, z\}$,

$\mathfrak{F}$ es una familia de conjuntos, y como

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ son equipotenciales
$\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{F}$ » »
$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{G}$ e $\boldsymbol{I}$ » »

se tiene:

$$\frac{\mathfrak{F}}{R} \equiv \{\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}\}, \{\boldsymbol{C}, \boldsymbol{F}\}, \{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{I}\}\}$$

siendo:

$$\text{Card}\,(\boldsymbol{A}) = 4, \quad \text{Card}\,(\boldsymbol{C}) = 3 \quad \text{y} \quad \text{Card}\,(\boldsymbol{B}) = 2$$

Conjuntos finitos e infinitos. Aunque hasta el momento nos ha bastado con los conceptos de conjunto finito e infinito, se impone ahora proceder a dar los criterios que nos permitan reconocer unos de otros.

1. Se dice que un conjunto $\boldsymbol{A}$ es *finito* si no hay posibilidad de aplicar biyectivamente $\boldsymbol{A}$ sobre un conjunto que esté contenido estrictamente en él. El cardinal de un conjunto finito es un número natural.

2. En cambio, si se puede aplicar biyectivamente el conjunto $\boldsymbol{A}$ sobre otro que esté contenido estrictamente en él, diremos que $\boldsymbol{A}$ es un conjunto *infinito* y que el Card $(\boldsymbol{A})$ *es un número transfinito.*

35. Conjuntos numerables

El conjunto $\boldsymbol{N}^*$ de los números naturales es infinito, puesto que, según prueba el esquema adjunto,

N^*	1	2	3	4	5	...
	2	4	6	8	10	...

se puede aplicar biyectivamente sobre el conjunto de los números pares, que está contenido estrictamente en él.

El conjunto

$$N^* \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

diremos que es *numerable* y que su *potencia* es 1, o también, que los conjuntos de la clase $C(N^*)$ tienen el mismo número transfinito de elementos o, finalmente, los conjuntos de $C(N^*)$ tienen el número transfinito 1 de elementos.

Todo conjunto aplicable biyectivamente sobre el conjunto N^* diremos también que es numerable.

Ejemplos:

a) A continuación ponemos varios conjuntos aplicables biyectivamente sobre el conjunto N^* y, por tanto, numerables y de potencia 1.

N^*	1	2	3	4	5	. . .
A	2	4	6	8	10	. . .
B	1	3	5	7	9	. . .
C	1	4	9	16	25	. . .
D	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	. . .
E	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	. . .
F	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	. . .

b) El esquema adjunto nos prueba que el conjunto de los números racionales positivos es numerable y de potencia 1.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

c) Por la misma razón, el conjunto de los números racionales negativos es numerable.

d) Las conclusiones *b)* y *c)* nos conducen fácilmente a que *el conjunto de los números racionales es numerable.*

36. La potencia del continuo

I. El conjunto de puntos del intervalo cerrado [0, 1] no es numerable *.

II. El conjunto de puntos del intervalo [0, 1] es aplicable biyectivamente sobre el conjunto de puntos del intervalo de amplitud cualquiera $[a, b]$.

En efecto, la aplicación

$$y = a + (b - a)x$$

nos transforma el intervalo [0, 1] en el $[a, b]$.

---

* *Lecciones de Análisis*, por FRANCESCO SEVERI, tomo I, pág. 92. Editorial Labor.

III. En particular, el intervalo $[0, 1]$ es aplicable biyectivamente sobre el intervalo $[-1, 1]$.

IV. También el conjunto de puntos de una serie rectilínea * es aplicable biyectivamente sobre el conjunto de puntos del intervalo $[-1, 1]$.

En efecto, la aplicación

$$y = \frac{x}{1+|x|}$$

nos transforma el conjunto de puntos de una recta en el intervalo $[-1, 1]$. En resumen, los conjuntos de puntos $[0, 1]$, $[-1, 1]$, $[a, b]$ y la serie rectilínea, son equipotenciales y como el primero no es numerable tampoco lo son los otros.

Desigualdad de potencias. Si dados los conjuntos infinitos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, resultara que no fuera biyectable uno sobre el otro, diremos que esos conjuntos tienen *potencia desigual.*

Se dice, además, que la potencia de $\boldsymbol{A}$ es *menor* que la potencia de $\boldsymbol{B}$ si, teniendo distinta potencia dichos conjuntos, $\boldsymbol{A}$ es inyectable en $\boldsymbol{B}$.

Si $\boldsymbol{A}$ tiene menor potencia que $\boldsymbol{B}$, diremos, también, que la potencia de $\boldsymbol{B}$ es *mayor* que la de $\boldsymbol{A}$.

Potencia del continuo. I. Puesto que el conjunto $\boldsymbol{N}^*$, de los números naturales no es biyectable sobre el conjunto de puntos de la serie rectilínea, esos conjuntos tendrán distinta potencia y como, además, el primer conjunto es inyectable en el segundo, éste tendrá mayor potencia que aquél; es decir:

El conjunto de puntos de una recta tiene mayor potencia que el conjunto de los números naturales.

---

* Serie rectilínea es la recta considerada como conjunto de puntos, la recta es la base de la serie.

Diremos que *el conjunto de puntos de una recta (o de un intervalo cualquiera) tiene la potencia del continuo o*, también, *que su potencia es 2.*

I. *El conjunto de puntos del plano (del espacio) tiene la potencia del continuo* *.

* *Lecciones de Análisis*, por FRANCESCO SEVERI, tomo I, pág. 95. Editorial Labor.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Escríbanse todas las aplicaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$ sobre sí mismo.

Solución:

Si para representar una aplicación se escribe debajo de $\{1, 2, 3\}$ su transformada, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

indicando con esta notación que las imágenes de 1, 2 y 3 son 3, 1 y 2, respectivamente, se tendrá:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Averiguar si la aplicación

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1},$$

siendo

$$\boldsymbol{X} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{R},\ 2 \leqslant x \leqslant 3\}$$

tiene inversa y, caso afirmativo, hallarla.

Solución:

De

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \frac{x_1+2}{x_1-1} \neq \frac{x_2+2}{x_2-1} \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

luego f es inyectiva y, por tanto, tiene inversa.

La aplicación inversa de f es

$$f^{-1}(y)=\frac{y+2}{y-1}.$$

Obsérvese que $f=f^{-1}$.

3. Entre los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se establece la correspondencia $y=\operatorname{sen} x$, siendo

$$x\in \boldsymbol{A},\quad y\in \boldsymbol{B}\quad \text{y}\quad f(x)=\operatorname{sen} x.$$

Decir en cuál de los casos siguientes dicha correspondencia es una aplicación, y caso de que lo sea estudiarla.

1.° Si

$$\boldsymbol{A}\equiv\{x|x\}\in \boldsymbol{R},\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$$

y

$$\boldsymbol{B}\equiv\{y|y\in \boldsymbol{R},\ 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

2.° Si

$$\boldsymbol{A}\equiv\{x|x\in \boldsymbol{R},\ 0\leqslant x\leqslant\pi\}$$

y

$$\boldsymbol{B}\equiv\{y|y\in \boldsymbol{R},\ -1\leqslant y\leqslant 1\}.$$

3.° Si

$$\boldsymbol{A}\equiv\left\{x|x\in \boldsymbol{R},\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$

y

$$\boldsymbol{B}\equiv\{y|y\in \boldsymbol{R},\ -2\leqslant y\leqslant 1\}.$$

4.° Si

$$\boldsymbol{A}\equiv\{x|x\in \boldsymbol{R},\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$$

y

$$\boldsymbol{B}\equiv\{y|y\in \boldsymbol{R},\ -1\leqslant y\leqslant 1\}.$$

5.° Si

$$\boldsymbol{A}\equiv\left\{x|x\in \boldsymbol{R},\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$

y

$$\boldsymbol{B}\equiv\{y|y\in \boldsymbol{R},\ -1\leqslant y\leqslant 1\}.$$

Solución:

1.° *No es una aplicación,* puesto que las imágenes de los elementos del subconjunto de $\boldsymbol{A}$, $[-\pi, 0[$ no pertenecen al conjunto de valores $\boldsymbol{B}$.

2.º *Sí es una aplicación,* puesto que todo elemento de A tiene una imagen, y sólo una, perteneciente a B. Esta aplicación *no es sobreyectiva,* ya que transforma el conjunto A en una parte del conjunto B. *Tampoco es inyectiva,* ya que a elementos distintos de A no siempre corresponden elementos distintos de B, como ocurre, por ejemplo, para $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$, pues se tiene:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}=f\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

3.º *Sí es una aplicación,* puesto que todo elemento de A tiene una imagen, y sólo una, perteneciente a B. La aplicación f *no es sobreyectiva,* ya que transforma el conjunto A en una parte del conjunto B.

Sí es inyectiva, ya que a elementos distintos de A corresponden elementos distintos en B.

4.º *Sí es una aplicación,* puesto que todo elemento de A tiene una imagen, y sólo una, perteneciente a B. Esta aplicación *es sobreyectiva,* ya que transforma el conjunto A en el B. En cambio, *no es inyectiva,* ya que a elementos distintos de A no siempre corresponden elementos distintos en B.

5.º *Sí es una aplicación,* puesto que todo elemento de A tiene una imagen, y sólo una, perteneciente a B. La aplicación f *es sobreyectiva,* ya que transforma el conjunto A en el B. También *es inyectiva,* ya que a elementos distintos de A corresponden elementos distintos en B. Por tanto, en este caso f es biyectiva. Por ser inyectiva, tendrá inversa

$$f^{-1}(y)=\text{arc}\cdot\text{sen}\ y$$

el dominio y rango de ésta será:

$$B\equiv\{y|y\in R,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$$

y

$$A\equiv\left\{x\in R,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

respectivamente.

4. Dadas las aplicaciones $f(x)=x^2$, del conjunto N^* en sí mismo, y $\varphi(x)=x-1$ del conjunto de los números naturales mayores que 1 en el conjunto N^*, estudiarlas y formar los posibles productos entre ellas.

Solución:

f es una aplicación, puesto que el cuadrado de un número natural es único y también natural. Esta aplicación *no es sobreyectiva*, ya que

$$\{x^2 | x \in N^*\} \subset N^*.$$

En cambio, *sí es inyectiva*, puesto que:
Si

$$(x_1, x_2) \in N^{*2} \quad \text{y} \quad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow x_1^2 \neq x_2^2$$

También φ *es una aplicación*, puesto que si x es un número natural mayor que 1, $x-1$ es único y también natural. La aplicación φ *es sobreyectiva*, puesto que

$$\{x-1 | x \in N^*,\ x > 1\} = N^*$$

También φ *es inyectiva*, ya que:

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow x_1 - 1 \neq x_2 - 1 \Longrightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2).$$

Por ser φ sobreyectiva e inyectiva será biyectiva. Además, como tanto f como φ son inyectivas, ambas tienen inversa y, por tanto, si la imagen correspondiente a un x cualquiera del dominio de cada aplicación la representamos con y, estas aplicaciones inversas serán:

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

de dominio y rango $\{x^2 | x \in N^*\}$ y N^*, respectivamente, y

$$\varphi^{-1}(y) = y + 1$$

de dominio y rango N^* y $\{y+1 | y \in N^*\}$, respectivamente. Finalmente, vamos a proceder a formar los dos productos posibles:

$$[f \circ \varphi](x) = f[\varphi(x)] = f(x-1) = (x-1)^2$$
$$[\varphi \circ f](x) = \varphi[f(x)] = \varphi(x^2) = x^2 - 1$$

Obsérvese cómo

$$[f \circ \varphi](x) \neq [\varphi \circ f](x),$$

esto es, el producto de aplicaciones no tiene, en general, la propiedad conmutativa.

5. Clasificar las siguientes correspondencias:

1.° $y = \text{arc}\cdot\text{sen}\, x$, siendo $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}$.
2.° $y = E(x)$, siendo $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R}^{+}$ y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}$.
3.° $x^2 + y^2 = 9$, siendo $\boldsymbol{X} = [0, 3]$ y $\boldsymbol{B} = [-3, 0]$.

Solución:

1.° *No es una aplicación,* puesto que no tienen imagen los valores de x que sean menores que -1 o mayores que 1.

2.° Si $E(x)$ significa «parte entera de x», *E es una aplicación,* ya que todo número real positivo tiene parte entera única; así, por ejemplo:

$$E(0,47) = 0; \quad E(e) = 2; \quad E(\pi) = 3; \quad \text{etc.}$$

Esta aplicación *es sobreyectiva,* puesto que transforma el conjunto $\boldsymbol{R}^{+}$ en el $\boldsymbol{N}$.

En cambio, *no es inyectiva,* ya que elementos distintos del dominio no siempre tienen imágenes distintas, como ocurre, por ejemplo, con los elementos distintos 4,58 y 4,76, cuya imagen común es 4. Al no ser inyectiva, la aplicación E no tendrá inversa.

3.° De $x^2 + y^2 = 9$ se sigue que

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2},$$

igualdad que establece una relación (22) entre x e y que hace corresponder a cada $x \in [0, 3]$ un par de valores $\sqrt{9 - x^2}$ y $-\sqrt{9 - x^2}$ para y; ahora bien, si el conjunto de valores de la anterior relación lo limitamos (tal como se ha hecho en la hipótesis de partida) al intervalo $[0, -3]$; entonces a cada $x \in [0, 3]$ corresponde un valor $-\sqrt{9 - x^2}$ y sólo uno para y; lo que prueba definitivamente que la repetida relación *es una aplicación* del conjunto $[0, 3]$ en el $[0, -3]$. Esta aplicación *es sobreyectiva,* puesto que transforma el conjunto $[0, 3]$ en el $[0, -3]$, es decir, es una aplicación sobreyectiva del conjunto $[0, 3]$ sobre el $[0, -3]$.

Finalmente, la repetida aplicación *es inyectiva,* ya que a elementos distintos del dominio corresponden imágenes distintas en el rango.

Si la anterior aplicación la representamos con $y = f(x)$, es decir, si

$$f(x) = -\sqrt{9 - x^2},$$

se tendrá, para la inversa:

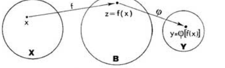
$$f^{-1}(y)=\sqrt{9-y^2},$$

cuyo dominio y rango serán los conjuntos $[0, -3]$ y $[0, 3]$, respectivamente.

6. Demostrar que si dos aplicaciones biyectivas se pueden multiplicar, su producto es también una aplicación biyectiva.

Solución:

Sean f y φ dos aplicaciones biyectivas de dominio y rango $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{B}$, respectivamente, para la primera, y $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{Y}$ para la segunda, tal como se indica en los esquemas adjuntos.



$$X \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\varphi} Y$$

Para probar que la aplicación producto $\varphi \circ f$ es biyectiva habrá que demostrar que es sobreyectiva e inyectiva.

1.° Por ser φ sobreyectiva, cada $y \in \boldsymbol{Y}$ es imagen de un, al menos, $z \in \boldsymbol{B}$, tal que $y=\varphi(z)$.

Análogamente, por ser f sobreyectiva, cada $z \in \boldsymbol{B}$ es imagen de un, al menos, $x \in \boldsymbol{X}$, tal que $z=f(x)$. Luego, en definitiva, cada $y \in \boldsymbol{Y}$ es imagen o transformada de un, al menos, $x \in \boldsymbol{X}$, tal que

$$y=\varphi[f(x)]=[\varphi \circ f](x),$$

es decir, $\varphi \circ f$ es sobreyectiva.

2.° Por ser tanto f como φ inyectivas, se tendrá:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \implies \varphi[f(x_1)] \neq \varphi[f(x_2)]$$

o sea:

$$x_1 \neq x_2 \implies [\varphi \circ f](x_1) \neq [\varphi \circ f](x_2),$$

luego $\varphi \circ f$ es también inyectiva y, por tanto, biyectiva.

Análogamente, se demostrará que $f \circ \varphi$ es también biyectiva.

7. Poner dos ejemplos de pares de aplicaciones que no se puedan multiplicar.

Solución:

1.°

$y = \sqrt{z}$, de dominio $\boldsymbol{B} \equiv \{z | z \in \boldsymbol{R},\ z \geqslant 0\}$
$z = \log x$, » $\boldsymbol{X} \equiv \{x | x \in \boldsymbol{R},\ 0 < x < 1\}$

La aplicación producto $y = \sqrt{\log x}$ no está definida, puesto que para todo

$$x \in \boldsymbol{X} \Longrightarrow z = \log x < 0,$$

luego $z \notin \boldsymbol{B}$.

2.°

$y = \log z$, de dominio $\boldsymbol{B} \equiv \{z | z \in \boldsymbol{R},\ z > 0\}$
$z = \operatorname{sen} x$, » $\boldsymbol{X} \equiv \left\{x | x \in \boldsymbol{R},\ \pi < x < 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$

La aplicación producto $y = \log(\operatorname{sen} x)$ no está definida, puesto que para todo

$$x \in \boldsymbol{X} \Longrightarrow z = \operatorname{sen} x < 0,$$

luego $z \notin \boldsymbol{B}$.

8. Si f es la aplicación que hace corresponder a cada conjunto su complementario, se pide demostrar las igualdades:

$$f(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}'.$$

Solución:

1.° $f(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}') =$
$= (\boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}') \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}') = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}.$

2.° $f(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B}' \cap \boldsymbol{A}') =$
$= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}') \cup (\boldsymbol{B}' - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}'.$

9. Un conjunto $\boldsymbol{A}$ tiene n elementos y otro $\boldsymbol{B}$ tiene m elementos. Probar que:

1.° Para que existan aplicaciones inyectivas de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$ tiene que ser $n \leqslant m$.

2.° El número de inyecciones es:

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1).$$

Solución:

1.° Toda aplicación inyectiva de A en B proporcionará tantas imágenes, distintas entre sí, como elementos tiene A, esto es, n imágenes.

Por otra parte, como la transformada de A, según f, debe estar contenida en B, se tendrá $n \leqslant m$.

2.° Se podrán formar tantas inyecciones como conjuntos ordenados de n objetos se pueden formar con m elementos distintos entre sí, esto es, como variaciones ordinarias de orden n se pueden formar con m objetos *; o sea:

$$m \cdot (m-1)(m-2) \ldots (m-n+1).$$

10. Dadas las aplicaciones siguientes, se pide: 1.°, estudiarlas, y 2.°, formar sus posibles productos.

Para x entero: $\quad f(x) = -x \quad$ y $\quad \varphi(x) = x^3$,

siendo $\mathbf{Z}$ el conjunto de valores de ambas.

Solución:

1.° *a)* La aplicación f *es sobreyectiva,* puesto que

$$f(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}.$$

También es *inyectiva,* ya que si

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow -x_1 \neq -x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Por tanto, f es biyectiva. Además, como $y = f(x)$ es inyectiva, tiene inversa

$$f^{-1}(y) = -y.$$

Obsérvese que f y su inversa f^{-1} coinciden.

b) La aplicación φ *no es sobreyectiva,* puesto que hay elementos de $\mathbf{Z}$ que no son imagen de ningún elemento del dominio, como ocurre, por ejemplo, para los números 2, -3, 7, etc. En cambio, *sí es inyectiva,* ya que si

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow x_1^3 \neq x_2^3 \Longrightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2).$$

Como φ no es sobreyectiva, aunque sea inyectiva, no será biyectiva. Además, como $y = \varphi(x)$ es inyectiva,

---

* *Matemáticas Generales,* de ALFONSO BURGOS, tomo I, pág. 17.

tendrá inversa $\varphi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

2.° *a)* $\varphi[f(x)] = \varphi(-x) = (-x)^3 = -x^3$

b) $f[\varphi(x)] = f(x^3) = -x^3$

Obsérvese que para estas dos aplicaciones

$$\varphi \circ f = f \circ \varphi;$$

esto es, su producto tiene la propiedad conmutativa, cosa que, como hemos visto anteriormente, no ocurre en general.

11. Recordando el concepto de aplicación, de aplicación inversa y de aplicación compuesta, demostrar las siguientes propiedades:

1.° Si f es biyectiva: $(f^{-1})^{-1} = f$.

2.° Si f es biyectiva: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \boldsymbol{I}$.

3.° Si f y φ son biyectivas:

$$(f \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ f^{-1}.$$

Solución:

1.° Si $(f^{-1})^{-1}(x) = y \implies f^{-1}(y) = x \implies y = f(x)$

de la primera y última igualdad, se sigue:

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \implies (f^{-1})^{-1} = f.$$

2.° *a)* Si $f^{-1}(x) = y \implies f(y) = x.$

Ahora bien:

$$[f \circ f^{-1}](x) = f[f^{-1}(x)] = f(y) = x \implies f \circ f^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

b) Análogamente, si

$$f(x) = y \implies f^{-1}(y) = x.$$

Ahora bien:

$$[f^{-1} \circ f](x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x \implies f^{-1} \circ f = \boldsymbol{I}.$$

3.° $(f\circ\varphi)\circ(\varphi^{-1}\circ f^{-1})=f\circ(\varphi\circ\varphi^{-1})\circ f^{-1}=(f\circ \boldsymbol{I})\circ f^{-1}=$
$=f\circ f^{-1}=\boldsymbol{I}\implies (f\circ\varphi)^{-1}=\varphi^{-1}\circ f^{-1}.$

12. Encontrar $f(x)$ si $\varphi(x)$ y $[\varphi\circ f](x)$ vienen dadas como sigue:

$$\varphi(x)=x^3 \quad \text{y} \quad [\varphi\circ f](x)=x^3-3x^2+3x-1.$$

Solución:

$$[\varphi^{-1}\circ(\varphi\circ f)](x)=[(\varphi^{-1}\circ\varphi)\circ f](x)=[\boldsymbol{I}\circ f](x)=f(x),$$

de donde:

$$f(x)=[\varphi^{-1}\circ(\varphi\circ f)](x)=\varphi^{-1}(x^3-3x^2+3x-1)=$$
$$=\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}=\sqrt[3]{(x-1)^3}=x-1$$

o sea:
$$f(x)=x-1.$$

También podría hacerse así:

$$[\varphi\circ f](x)=\varphi[f(x)]=[f(x)]^3\implies [f(x)]^3=x^3-3x^2+3x-1\implies$$
$$[f(x)]^3=(x-1)^3\implies f(x)=x-1.$$

13. Dadas las aplicaciones:

$$[f\circ\varphi](x)=2x^2+6x+9 \quad \text{y} \quad f(x)=2x-1$$

hallar $\varphi(x)$.

Solución:

$$y=2x-1;\quad x=\frac{y+1}{2};\quad f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}.$$

Por otra parte:

$$\varphi(x)=[(f^{-1}\circ f)\circ\varphi](x)=[f^{-1}\circ(f\circ\varphi)](x)=$$
$$=f^{-1}(2x^2+6x+9)=\frac{2x^2+6x+9+1}{2}=x^2+3x+5$$

o sea:
$$\varphi(x)=x^2+3x+5.$$

También podría hacerse así:

$$[f\circ\varphi](x)=f[\varphi(x)]=2\varphi(x)-1\implies 2\varphi(x)-1=2x^2+6x+9\implies$$
$$\varphi(x)=x^2+3x+5.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Entre los conjuntos A y B se establece la correspondencia $y=2^x$, siendo

$$x \in A, \quad y \in B \quad \text{y} \quad f(x)=2^x.$$

Decir en cuál de los casos siguientes dicha correspondencia es una aplicación y, caso de que lo sea, estudiarla y hallar su inversa, caso de que sea posible.

1.° Si $A=R$ y $B=R$.

2.° Si $A=R$ y $B \equiv R^-$.

3.° Si $A \equiv R^+$ y $B=R$.

4.° Si $A \equiv \{x|x \in R,\ x \geqslant 0\}$ y $B \equiv \{y|y \in R,\ y \geqslant 1\}$.

5.° Si $A=R$ y $B \equiv R^+$.

6.° Si $A \equiv \{x|x \in R,\ x \leqslant 0\}$ y $B \equiv \{y|y \in R,\ 0 < y \leqslant 1\}$.

7.° Si $A \equiv \{x|x \in R,\ x \geqslant 0\}$ y $B \equiv \{y|y \in R,\ y < 1\}$.

8.° Si $A \equiv \{x|x \in R,\ x \leqslant 0\}$ y $B \equiv \{y|y \in R,\ y > 1\}$.

2. Dadas las aplicaciones:

$$y=\cos x, \quad \text{siendo} \quad f(x)=\cos x;$$
$$y=\log x, \quad \text{»} \quad \varphi(x)=\log x;$$
$$y=\sqrt{x}, \quad \text{»} \quad \psi(x)=\sqrt{x};$$

cuyos dominios son: $X=R$, $X=R^+$ y $X=R^+$, respectivamente, se pide hallar y estudiar:

1.° $f^{-1}(y)$, $\varphi^{-1}(x)$, $\psi^{-1}(z)$;

2.° $[f \circ \varphi](x)$, $[f \circ \psi](y)$, $[\varphi \circ \psi](z)$;

3.° $[\varphi \circ f](x)$, $[\psi \circ f](u)$, $[\psi \circ \varphi](v)$;

4.° $[f \circ \varphi \circ \psi](x)$, $\{f \circ [\varphi \circ \psi]\}(u)$, $\{[f \circ \varphi] \circ \psi\}(v)$.

3. Dadas las aplicaciones:

$$y = \operatorname{tg} x, \qquad \text{siendo} \qquad f(x) = \operatorname{tg} x;$$
$$y = x^2, \qquad » \qquad \varphi(x) = x^2;$$
$$y = \sqrt{25 - x^2}, \qquad » \qquad \psi(x) = \sqrt{25 - x^2};$$

cuyos dominios son:

$$X \equiv \left\{ x | x \in \boldsymbol{R},\ 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \right\},$$
$$X \equiv \{ x | x \in \boldsymbol{R},\ x \geqslant 0 \}$$

y

$$X \equiv \{ x | x \in \boldsymbol{R},\ 0 \leqslant x \leqslant 5 \},$$

respectivamente, se pide hallar y estudiar:

1.° $f^{-1}(y)$, $\varphi^{-1}(x)$, $\psi^{-1}(z)$;
2.° $[f \circ \varphi](x)$, $[f \circ \psi](y)$, $[\varphi \circ \psi](u)$;
3.° $[\varphi \circ f](x)$, $[\psi \circ f](u)$, $[\psi \circ \varphi](v)$;
4.° $[f \circ \varphi]^{-1}(x)$, $[\varphi^{-1} \circ f^{-1}](x)$, $[(f^{-1})^{-1}](x)$;
5.° $[f^{-1} \circ f^{-1}](x)$, $[\varphi^{-1} \circ \varphi^{-1}](x)$, $[\psi^{-1} \circ \psi^{-1}](x)$.

4. Dada la aplicación

$$y = |x|, \qquad \text{siendo} \qquad f(x) = |x|$$

cuyo dominio es:

$$X \equiv \{ x | x \in \boldsymbol{R},\ x \geqslant 0 \}$$

se pide hallar y estudiar:

1.° $f^{-1}(y)$;
2.° $[f \circ f](x)$;
3.° $[f^{-1} \circ f^{-1}](x)$;
4.° $[f \circ f]^{-1}(u)$;
5.° $[(f^{-1})^{-1}](v)$.

5. Dadas las aplicaciones:

a) $y = E(x)$, siendo: $\quad f(x) = E(x)$

b) $y = \varphi(x)$, siendo:

para $x < 0$, $\quad \varphi(x) = -1$;
para $x = 0$, $\quad \varphi(x) = 0$;
para $x > 0$, $\quad \varphi(x) = 1$.

8. Dadas las aplicaciones:

$$y=f(x), \quad \text{siendo} \quad f(x)=x^2$$
$$y=\varphi(x), \quad \text{siendo} \quad \varphi(x)=x+2$$

cuyos dominios para ambas son $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{R}$ y cuyos conjuntos de valores, también para ambas, son $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{R}$.

Hallar:

$$[f \circ \varphi](x) \quad \text{y} \quad [\varphi \circ f](z)$$

Solución:

a) $[f \circ \varphi](x)=(x+2)^2$; *b)* $[\varphi \circ f](z)=z^2+2$.

9. Dadas las aplicaciones:

$$y=f(x), \quad \text{siendo} \quad f(x)=x+7$$
$$y=\varphi(x), \quad \text{siendo} \quad \varphi(x)=\sqrt{x+7},$$

cuyos dominios para ambas son $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{N}$ y cuyos conjuntos de valores son $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{N}$ y $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{R}$, respectivamente. Hallar:

$$[f \circ \varphi](x) \quad \text{y} \quad [\varphi \circ f](x).$$

Solución:

a) $[f \circ \varphi](x)=\sqrt{x+7}+7$; *b)* $[\varphi \circ f](x)=\sqrt{x+14}.$

10. Dadas las aplicaciones:

$$y=f(x), \quad \text{siendo} \quad f(x)=x^4$$
$$y=\varphi(x), \quad \text{siendo} \quad \varphi(x)=\cos x$$

definidas en el conjunto de números reales. Hallar:

$$[f \circ \varphi](x) \quad \text{y} \quad [\varphi \circ f](y).$$

Solución:

a) $[f \circ \varphi](x)=\cos^4 x$; *b)* $[\varphi \circ f](y)=\cos (y^4)$.

11. Dadas las parejas de aplicaciones siguientes, definidas en el conjunto de los números reales, hallar el producto $[\varphi \circ f](x)$, en cada uno de los casos en que pueda formarse, así como el dominio respectivo.

a) $f(x)=1-x$ y $\varphi(x)=x^2+2x$.

b) $f(x)=x+5$ y $\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$, si $x\neq 0$; $\varphi(0)=1$.

c) $f(x)=2x$, si $0\leqslant x\leqslant 1$; $f(x)=1$, para los demás valores de x; $\varphi(x)=x^2$, si $0\leqslant x\leqslant 1$; $\varphi(x)=0$, para los demás valores de x.

Solución:

a) $[\varphi\circ f](x)=x^2-4x+3$; $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{R}$.

b) $[\varphi\circ f](x)=\dfrac{|x+5|}{x+5}$; $\boldsymbol{X}\equiv\{x|x\in\boldsymbol{R},\ x\neq -5\}$.

c) $[\varphi\circ f](x)=4x^2$ para $\boldsymbol{X}\equiv\{x|x\in\boldsymbol{R},\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$

en cambio,

$$[\varphi\circ f](x)=1 \quad \text{para} \quad \boldsymbol{X}\equiv\{x|x\in\boldsymbol{R},\ x>1 \text{ ó } x<0\}.$$

12. Encontrar $f(x)$, si $\varphi(x)$ y $[\varphi\circ f](x)$ vienen dadas como sigue:

$$\varphi(x)=x^2+x+3 \quad \text{y} \quad [\varphi\circ f](x)=x^2-3x+5$$

Solución:

a) $f(x)=x-2$; *b)* $f(x)=-x+1$.

13. Dadas tres aplicaciones f, φ y ψ, ¿qué restricciones deben imponerse a sus dominios para que las cuatro aplicaciones compuestas siguientes puedan ser definidas?

$$\varphi\circ f, \quad \psi\circ\varphi, \quad \psi\circ(\varphi\circ f), \quad (\psi\circ\varphi)\circ f.$$

14. Probar que un conjunto es finito si no contiene ningún subconjunto equipotencial distinto del mismo, y recíprocamente.

15. Dadas las aplicaciones:

a) $\varphi(x)=2x-3$ y $[\varphi\circ f](x)=2x^2+2x+3$

b) $\varphi(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ y $[\varphi\circ f](x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-2x+6}$

hallar $f(x)$.

Solución:

a) $f(x)=x^2+2x+3$; *b)* $f(x)=x^2-2x+5$.

5
leyes de composición

36. Introducción

En el desarrollo de la Aritmética y de la Geometría se habrá podido observar cómo, partiendo de ciertos elementos, tales como números, puntos, vectores, etc., se procede a definir operaciones con ellos, como son las de suma, resta, multiplicación y división de números o vectores, o bien producto de números por vectores, por no citar más que las más elementales.

Una marcha similar estamos siguiendo nosotros; hemos comenzado por establecer, en el capítulo 1, el concepto de conjunto, así como las propiedades inherentes a él, para después proceder a definir en el capítulo siguiente diferentes operaciones con conjuntos.

Ahora, partiendo de lo que tienen de común las operaciones entre sí, vamos a tratar de conseguir la definición general de operación y que, por tanto, ésta sea válida cualquiera que sea la naturaleza de los elementos de partida.

37. Operaciones

Si actuando, según unas leyes o reglas dadas, sobre uno, dos o más elementos o subconjuntos de uno o más conjuntos, se obtiene un elemento o bien un subconjunto, diremos que hemos efectuado una *operación* con aquellos elementos o subconjuntos de partida.

Los elementos o subconjuntos de partida son los *componentes* o *datos* de la operación y el elemento o subconjunto obtenido es el *resultado* de ella.

Ejemplos:

a) La suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación de números en $\boldsymbol{R}$ son operaciones, puesto que, partiendo de dos o más números, obtenemos un resultado, salvo en las restricciones de rigor.

b) La intersección, reunión, diferencia y suma booleana de subconjuntos.

c) La suma y resta de vectores libres.

d) La multiplicación de un escalar por un vector y la multiplicación escalar de dos vectores coplanarios.

Los ejemplos anteriores señalan una marcada diferencia entre los *a), b)* y *c)* con el *d),* pues, en efecto, en los tres primeros el resultado es un elemento o subconjunto del conjunto a que pertenecen los datos. En cambio, en los ejemplos *d)* el resultado pertenece a uno de los conjuntos de partida o a un conjunto distinto del de partida.

Los ejemplos anteriores nos ponen de manifiesto que existen grandes diferencias entre las distintas operaciones y nos señalan, además, la posibilidad de clasificar éstas.

Ahora bien, como para definir una operación hay que comenzar por dar la ley que la va a regir, son éstas las que dan lugar a dichas diferencias y, por tanto, dichas leyes serán las que, en definitiva, nos van a permitir clasificar las operaciones.

38. Leyes de composición de las operaciones binarias

Son las reglas que permiten obtener el resultado a partir de los datos.

Es obvio que podremos crear tantas operaciones cuantas leyes de composición podamos formular.

Una vez establecida la ley de composición que va a determinar la operación, se debe proceder a asignar a ésta un signo gráfico que la represente.

Así se ha hecho en la Aritmética, donde primero se han definido las operaciones de suma, resta, ... y después se han representado éstas por los signos correspondientes $+$, $-$, ...

Ahora bien, para indicar una operación en su más amplia acepción, es claro que podremos emplear signos convencionales cualesquiera, con tal de que sean distintos a los empleados en operaciones específicas. A este fin podremos emplear, por ejemplo, los signos $*$, $\perp$, $\wedge$, ...

Por tanto, si los componentes de la operación los representamos con las letras a y b, el resultado de aquélla vendrá dado en una de las formas:

$$a * b, \quad a \perp b, \quad a \wedge b, \ldots$$

que leeremos «a compuesto con b», o de la manera que se convenga en el momento oportuno.

Cuando se trata de un número finito de datos posibles, la aplicación de esta ley se puede facilitar con la ayuda de una tabla de doble entrada, tal como se hace en la Aritmética con las tablas pitagóricas de sumas y productos.

39. Leyes de composición de las operaciones unitarias

Cabe considerar todavía ciertas operaciones en las que el resultado se obtiene a partir de un solo dato. Así ocurre, por ejemplo, con la operación de radicación cúbica en el conjunto $\boldsymbol{R}$, pues, en efecto, a cada $x \in \boldsymbol{R}$ le corresponde, o podemos asociar, un resultado, y sólo uno; concretamente, la $\sqrt[3]{x}$.

Ejemplos:

a) La división por 5 en el conjunto $\boldsymbol{Q}$.
b) La logaritmación de base 10 en el conjunto $\boldsymbol{R}^+$.
c) La complementación (12) en el conjunto $\boldsymbol{N}$.

Si el dato de la operación unitaria lo representamos con la letra a, y a la operación con el signo $*$, por ejemplo, el resultado de la operación lo simbolizaremos en la forma:

$$* a$$

y leeremos «asterisco de a».

40. Clasificación de las leyes de composición

Atendiendo a la naturaleza de los resultados de las operaciones o a que el número de datos sea dos o uno, las leyes de composición que determinan aquéllas se pueden clasificar así:

1.° **Leyes binarias de composición interna.** I. Son las que partiendo de ciertos pares (x, y) de elementos *, diferentes o no, de un mismo conjunto A, el resultado también pertenece a dicho conjunto.

Si la ley es aplicable a todos los pares (x, y) del producto cartesiano $A \times A$, y el resultado es siempre un elemento de A, diremos que dicha ley está *definida en todo el conjunto* A, que es *cerrada* o *estable* con respecto al repetido conjunto, o bien que tiene la propiedad de *clausura.*

Es inmediato que debemos llamar *operaciones internas* a aquéllas cuyas leyes de composición sean internas.

Ejemplos:

a) La suma, resta, multiplicación y división son operaciones binarias internas en el campo de los números enteros Z.

b) La suma, resta y multiplicación son operaciones binarias internas cerradas con respecto al conjunto Z.

c) Si A y B pertenecen al conjunto universal U, la reunión, intersección y diferencia de A y B son operaciones binarias internas cerradas con respecto a U.

d) Dado el conjunto de subconjuntos:

$$U \equiv \{A, B, C, D\},$$

siendo:

$$A \equiv \{a, b\}; \quad B \equiv \{a\}; \quad C \equiv \{b\} \quad \text{y} \quad D \equiv \{\ \}.$$

---

* Con objeto de dar una mayor generalidad al lenguaje, la palabra «elemento» la emplearemos también con el significado de «subconjunto».

Hallar el resultado de las operaciones binarias internas cerradas de intersección, reunión y diferencia de cada pareja ordenada de subconjuntos.

Solución:

Apoyándonos en las definiciones respectivas obtenemos fácilmente tales resultados, que evidentemente resulta más cómodo disponerlos en tablas de doble entrada, tal como a continuación se indica:

$\cap$	*A*	*B*	*C*	*D*
A	*A*	*B*	*C*	*D*
B	*B*	*B*	*D*	*D*
C	*C*	*D*	*C*	*D*
D	*D*	*D*	*D*	*D*

$\cup$	*A*	*B*	*C*	*D*
A	*A*	*A*	*A*	*A*
B	*A*	*B*	*A*	*B*
C	*A*	*A*	*C*	*C*
D	*A*	*B*	*C*	*D*

$-$	*A*	*B*	*C*	*D*
A	*D*	*C*	*B*	*A*
B	*D*	*D*	*B*	*B*
C	*D*	*C*	*D*	*C*
D	*D*	*D*	*D*	*D*

Las tablas anteriores se han confeccionado de tal forma que el primer y segundo componente de la operación respectiva han de ser tomados en la primera columna y primera fila, respectivamente.

Obsérvese que puesto que los dos primeros cuadros son simétricos con respecto a la diagonal principal (la que parte del vértice superior izquierdo), las operaciones $\cap$ y $\cup$ tienen la propiedad conmutativa (al menos en el ejemplo que estamos considerando); en cambio, la operación $-$ no la tiene.

Es importante advertir que los ejemplos anteriores nos señalan la posibilidad de definir operaciones binarias internas a partir de tablas confeccionadas en forma arbitraria.

e) Dado el conjunto $\boldsymbol{C}$ de los puntos de un plano, si hacemos corresponder a cada par ordenado de puntos (A, B), el punto medio M del segmento AB; queda definida una operación binaria interna y cerrada que podemos llamar, por ejemplo, «punto medio». Si dicha operación la representamos con la notación $*$, se tendrá:

$$A * B = M.$$

Es inmediato que la operación punto medio tiene la propiedad conmutativa, es decir, que

$$A * B = B * A.$$

De todo lo anterior se sigue que:

Una ley binaria de composición interna sobre un conjunto $\boldsymbol{A}$ *es una aplicación* f *del producto cartesiano* $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$, *o de parte de él, en* $\boldsymbol{A}$.

En símbolos:

$$f: \qquad (x, y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \longrightarrow f(x, y) \in \boldsymbol{A}.$$

II. Establecida la definición de ley binaria de composición interna, vamos a considerar ahora el caso de que el número de componentes de la operación sea superior a dos.

Si con objeto de fijar ideas suponemos que los elementos de partida son x, y, z y t, y que la operación la representamos con la notación $*$, la expresión

$$x * y * z * t$$

la tomaremos en el sentido de que tenemos que comenzar por hallar el resultado r_1, obtenido al operar con los dos primeros componentes x e y, para después componer r_1 con z; tendremos así un nuevo resultado r_2, que finalmente habrá que componer con el último elemento t, es decir:

$$x * y * z * t = [(x * y) * z] * t$$

2.º **Ley unitaria de composición interna.** Dado un conjunto $\boldsymbol{A}$, se llama *ley unitaria de composición interna* a toda regla, ley o procedimiento que permita asociar a ciertos elementos de $\boldsymbol{A}$ uno (o varios) elementos perfectamente determinado (determinados) también perteneciente(s) a $\boldsymbol{A}$.

Si la operación la representamos con la notación $*$ (asterisco), se tendrá:

$$x \in \boldsymbol{A} \xrightarrow{*} *x \in \boldsymbol{A}$$

Ejemplos:

a) Si los símbolos $*$, $\perp$ y $\top$ representan, respectivamente, la multiplicación por 6, la potenciación de exponente 3 y la raíz cuadrada en el conjunto $\boldsymbol{R}$, se tendrá:

$$x \in \boldsymbol{R} \xrightarrow{*} 6 \cdot x \in \boldsymbol{R}; \qquad x \in \boldsymbol{R} \xrightarrow{\perp} x^3 \in \boldsymbol{R}$$

$$x \in \{x | x \in \boldsymbol{R},\ x \geqslant 0\} \xrightarrow{\top} \pm \sqrt{x} \in \boldsymbol{R}$$

b) Si el símbolo $\wedge$ representa la complementación (12) al conjunto $\boldsymbol{A} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; se tendrá, por ejemplo:

$$\{1, 3, 5, 7, 9\} \subset \boldsymbol{A} \xrightarrow{\wedge} \{2, 4, 6, 8\} \subset \boldsymbol{A}$$

c) Dado el conjunto $\boldsymbol{A}$ de todos los puntos del plano y el vector libre $\boldsymbol{V}$, si asociamos a cada punto P del plano, el extremo Q del vector $\boldsymbol{PQ}$ equipolente al vector dado $\boldsymbol{V}$;

$$\xrightarrow{\boldsymbol{V}}$$

$$\overset{P}{\bullet}\!\longrightarrow\!\overset{Q}{\bullet}$$

habremos definido así una ley unitaria de composición interna a la que llamaremos *traslación según el vector* $\boldsymbol{V}$ *del plano sobre sí mismo.*

Si dicha ley la representamos con el símbolo $\vee$, tendremos:

$$P \in \boldsymbol{A} \xrightarrow{\vee} Q \in \boldsymbol{A}.$$

Resumiendo: *Una ley unitaria de composición interna sobre un conjunto A es una aplicación f del conjunto A en A*, o sea:

$$f: \quad x \in A \longrightarrow f(x) \in A$$

Es obvio que llamaremos *operaciones unitarias* a aquellas cuyas leyes de composición sean unitarias.

3.º **Ley binaria de composición externa.** I. Dados los conjuntos $\Omega \equiv \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$, al que llamaremos *dominio de operadores*, y $A \equiv \{x, y, z, \ldots\}$, llamaremos *ley binaria de composición externa* a toda regla f que hace corresponder a cada par ordenado (α, x) del producto $\Omega \times A$ un elemento perfectamente determinado del conjunto A, al que representaremos con la notación $\alpha \cdot x$.

Dicha ley es, pues, una aplicación que toma sus argumentos en $\Omega \times A$ y los valores correspondientes pertenecen a A, es decir:

$$f: \quad (\alpha, x) \in \Omega \times A \longrightarrow \alpha \cdot x \in A$$

Las operaciones binarias cuyas leyes de composición son externas se llaman, por supuesto, *externas*.

Ejemplos:

a) La multiplicación de un escalar (número real) por un vector.

b) La multiplicación de un número real por una matriz.

c) La multiplicación de un número real por un polinomio.

II. Dados los conjuntos $A \equiv \{x, y, z, \ldots\}$ y $B \equiv \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$, también llamaremos *ley binaria de composición externa* a toda regla f que permita asociar a ciertos pares ordenados (x, y) del producto $A \times A$ un elemento perfectamente determinado perteneciente a B.

En símbolos:

$$f: \quad (x, y) \in A \times A \longrightarrow f(x, y) \in B$$

Ejemplos:

a) La multiplicación escalar de dos vectores libres.

b) Si A es el conjunto de puntos de un plano, B el conjunto de rectas de éste, y $*$ es la regla que asocia a cada par de puntos distintos de A, la recta que éstos determinan; $*$ es una ley binaria de composición externa.

c) Si A es el conjunto de puntos de un plano,

$$B \equiv \{x | x \in R,\ x \geqslant 0\}$$

y $\perp$ es la regla que asocia a cada par de puntos de A, el número positivo o nulo que mide el segmento que los une; $\perp$ es una ley binaria de composición externa.

4.° **Ley unitaria de composición externa.** Dados los conjuntos $A \equiv \{x, y, z, \ldots\}$ y $B \equiv \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ llamaremos *ley unitaria de composición externa* a toda regla f que permita asociar a cada elemento de A un elemento perfectamente determinado de B.

En símbolos:

$$f: \quad x \in A \longrightarrow f(x) \in B$$

Ejemplos:

a) Si A es el conjunto de todos los segmentos de un plano,

$$B \equiv \{x | x \in R,\ x \geqslant 0\}$$

y $*$ es la regla que asocia a cada segmento de A, el número positivo que lo mide; $*$ es una ley unitaria de composición externa.

b) Si A es el conjunto de todos los polígonos de un plano, $B = R^+$ y $\perp$ es la regla que asocia a cada polígono de A su área; $\perp$ es una ley unitaria de composición externa.

c) Si A es el conjunto de todos los cuerpos geométricos del espacio (figuras de tres dimensiones), $B = R^+$ y $\top$ es la regla que asocia a cada figura de A su volumen; $\top$ es una ley unitaria de composición externa.

41. Propiedades de las leyes de composición interna

1. **Propiedad asociativa.** Una ley de composición interna $*$, definida sobre un conjunto A, posee la *propiedad asociativa* si para cada tres elementos cualesquiera x, y, z del conjunto A se verifica:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

es decir, si

(1) $$(\forall x)(\forall y)(\forall z): \quad (x * y) * z = x * (y * z)$$

Ejemplos:

a) La suma y la multiplicación en el conjunto $\boldsymbol{R}$ de los números reales son leyes de composición interna asociativas, puesto que

$$(x+y)+z = x+(y+z) \quad \text{y} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

En cambio, la diferencia en $\boldsymbol{R}$ no es asociativa, puesto que, en general,

$$(x-y)-z \neq x-(y-z)$$

Tampoco es asociativa la potenciación en el conjunto $\boldsymbol{N}$ de los números naturales, puesto que, en general,

$$(x^y)^z \neq x^{(y^z)}$$

b) La intersección, reunión y suma booleana de conjuntos tienen la propiedad asociativa.

c) Si $\boldsymbol{R}$ es el conjunto de los números reales y hacemos corresponder a cada par (x, y) de números distintos de $\boldsymbol{R}$ el mayor de ellos, tenemos definida una operación interna que es asociativa, pues, efectivamente, si la ley establecida la representamos con $*$, y es, por ejemplo, $x < y < z$, se tendrá:

$$x * y = y, \qquad y * z = z, \qquad x * z = z$$

de donde

$$(x * y) * z = y * z = z; \qquad x * (y * z) = x * z = z,$$

luego

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

y, por tanto, la ley $*$ tiene la propiedad asociativa.

d) Si hacemos corresponder a cada par (x, y) de números cualesquiera de $\boldsymbol{R}$, su media aritmética $(x+y):2$ y representamos la operación interna y cerrada definida en $\boldsymbol{R}$, con la notación $*$, se tiene:

$$(x * y) * z = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} = \frac{x+y+2z}{4}$$

y como:

$$x * (y * z) = \frac{x + \frac{y+z}{2}}{2} = \frac{2x+y+z}{4}$$

en general,

$$(x * y) * z \neq x * (y * z)$$

y, por tanto, la ley $*$ no tiene la propiedad asociativa.

e) La suma de vectores libres tiene la propiedad asociativa.

2. **Propiedad conmutativa.** Una ley de composición interna $*$, definida sobre un conjunto $\boldsymbol{A}$, posee la *propiedad conmutativa*, si

(2) $$(\forall x)(\forall y): \quad x * y = y * x$$

Ejemplos:

a) La suma y la multiplicación en el conjunto $\boldsymbol{R}$ de los números reales son leyes de composición interna conmutativas, puesto que:

$$x + y = y + x \quad \text{y} \quad x \cdot y = y \cdot x$$

En cambio, la diferencia y el cociente en $\boldsymbol{R}$ no son conmutativas, puesto que, en general:

$$x - y \neq y - x \quad \text{y} \quad \frac{x}{y} \neq \frac{y}{x}$$

Tampoco es conmutativa la potenciación en el conjunto N de los números naturales, puesto que, en general,

$$x^y \neq y^x$$

b) La intersección, reunión y suma booleana de conjuntos tienen la propiedad conmutativa.

c) Las leyes de composición interna de los ejemplos *c)* y *d)* del número anterior 1, son conmutativas.

d) La suma de vectores libres es conmutativa.

3. **Propiedad asociativa y conmutativa.** Si la ley de composición interna $*$ es asociativa y conmutativa, el resultado final es independiente del orden en que se tomen los elementos y de la forma de agrupar éstos.

En efecto, si con objeto de fijar ideas nos referimos a los cuatro elementos x, y, z y t, las igualdades inmediatas que siguen nos prueban la certeza de la tesis.

$$x * y * z * t = [(x * y) * z] * t = [x * (y * z)] * t =$$
$$= x * [(y * z) * t] = [t * (z * y)] * x = \dots$$

42. Elemento regular

Un elemento $x \in A$ se dice *regular por la izquierda* para la ley $*$ si posee la propiedad siguiente:

(1) $$(\forall y)(\forall z): \quad x * y = x * z \implies y = z$$

Análogamente, x es *regular por la derecha* si

(2) $$(\forall y)(\forall z): \quad y * x = z * x \implies y = z$$

Si un elemento x es regular por la izquierda y por la derecha, se dice *regular*.

Cuando todos los elementos de un conjunto, sobre el que se ha establecido una ley $*$, son regulares, diremos que dichos elementos son *simplificables* para dicha ley.

Ejemplos:

a) Todos los números de N son regulares o simplificables para la suma, puesto que:

$$x+y=x+z \Longrightarrow y=z,$$
$$y+x=z+x \Longrightarrow y=z.$$

b) Todos los números de N^* son regulares o simplificables para la multiplicación, puesto que:

$$x \cdot y = x \cdot z \Longrightarrow y=z$$
$$y \cdot x = z \cdot x \Longrightarrow y=z$$

43. Elemento neutro

Se dice que un elemento e de un conjunto A, en el que se ha definido una operación interna $*$, es *neutro por la derecha* para dicha ley si, para todo $x \in A$, se verifica:

(1) $$x * e = x$$

Análogamente, se dice que $e' \in A$ es un elemento *neutro por la izquierda* para la ley $*$ si, para todo $x \in A$, se verifica:

(2) $$e' * x = x$$

Finalmente, si $e \in A$ es neutro por la derecha y por la izquierda para la ley $*$, diremos simplemente que e es *neutro* para la repetida ley $*$.

En símbolos, $e \in A$ es neutro para la ley $*$ si, y sólo si:

(3) $$(\forall x, x \in A): \quad x * e = e * x = x$$

Ejemplos:

a) En la suma de números en N, el 0 es el elemento neutro, puesto que para todo $x \in N$ se tiene:

$$x+0=0+x=x$$

b) En la multiplicación en N, el 1 es el elemento neutro, puesto que para todo $x \in N$, se tiene:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

En cambio, para la potenciación en N el 0 no es elemento neutro, puesto que, en general:

$$x^0 \neq 0^x$$

Tampoco lo es el 1, puesto que, en general:

$$x^1 \neq 1^x.$$

NOTA: Al estudiar la multiplicación de matrices tendremos oportunidad de comprobar la existencia de elementos neutros por la derecha (pero no por la izquierda) y de elementos neutros por la izquierda (pero no por la derecha), así como la existencia de elementos neutros.

Teorema 1. *Si la ley $*$ es conmutativa y tiene elemento neutro por la derecha (izquierda), lo es también por la izquierda (derecha) y, por tanto, dicho elemento es neutro para la repetida ley.*

En efecto, por ser e neutro por la derecha, se tiene:

$$x * e = x$$

Ahora bien, como la ley $*$ es conmutativa, tendremos:

$$e * x = x * e$$

de donde:

$$e * x = x$$

Luego e es también neutro por la izquierda para la ley $*$ y, por tanto, es neutro para la repetida ley.

Teorema 2. *Si la ley $*$ posee un elemento neutro, es único.*

En efecto, si tuviese dos elementos neutros e y e', se tendría:

$$e' * e = e * e' = e'$$

por ser e elemento neutro.

Análogamente, por ser e' elemento neutro, se tendría:

$$e * e' = e' * e = e$$

Luego:

$$e = e'$$

44. Elementos simétricos

Si una ley interna $*$, sobre un conjunto A, posee un elemento neutro e, se dice que el elemento $x' \in A$ es *simétrico por la derecha* con respecto a la ley $*$, del elemento $x \in A$, si:

(1) $$x * x' = e$$

Análogamente, se dice que $x' \in A$ es *simétrico por la izquierda* con respecto a la ley $*$, del elemento $x \in A$, si:

(2) $$x' * x = e$$

Finalmente, si $x' \in A$ es simétrico por la derecha y por la izquierda con respecto a la ley $*$, del elemento $x \in A$, diremos simplemente que x' es *simétrico* con respecto a la repetida ley $*$.

En símbolos, $x' \in A$ es simétrico de $x \in A$ con respecto a la ley $*$ si, y sólo si:

(3) $$x * x' = x' * x = e$$

Ejemplos:

a) En la suma de números en $\mathbf{Z}$, cada número $x \neq 0$, tiene por simétrico su opuesto $-x$, puesto que:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

b) En la multiplicación de números en $\boldsymbol{Q}$, cada número $x \neq 0$ tiene por simétrico su inverso, puesto que:

$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

En general, el simétrico de un elemento x, cuando existe, lo representaremos con la notación x^{-1}.

Si todo elemento de un conjunto A tiene un simétrico, con respecto a una ley dada $*$, diremos que la ley $*$ ha *simetrizado* el conjunto A.

PROPIEDAD. Si $x' \in A$ es simétrico de $x \in A$ con respecto a la ley $*$, se tendrá:

$$x * x' = x' * x = e$$

y como esta igualdad puede ser escrita en la forma:

$$x' * x = x * x' = e$$

podemos concluir que x es a su vez simétrico de x', es decir, que:

(4) $$(x')' = x \qquad \text{Involución.}$$

Esto es, *el simétrico del simétrico de un elemento es éste.*

Teorema 1. *Si un conjunto A está dotado de una ley asociativa $*$, y el elemento $x \in A$ admite simétrico, éste es único.*

En efecto, si tuviera dos simétricos x_1^{-1} y x_2^{-1}, se tendría:

$$x_1^{-1} * x = e \qquad \text{y} \qquad x * x_2^{-1} = e$$

Por otra parte, si tenemos en cuenta la asociatividad de la ley $*$ y las igualdades anteriores, podremos escribir:

$$x_1^{-1} * (x * x_2^{-1}) = (x_1^{-1} * x) * x_2^{-1} = e * x_2^{-1} = x_2^{-1};$$

$$x_1^{-1} * (x * x_2^{-1}) = x_1^{-1} * e = x_1^{-1}$$

de donde

$$x_2^{-1} = x_1^{-1}$$

Teorema 2. *Si la ley $*$ es asociativa y los elementos x e y admiten simétricos, el compuesto $x * y$ admite también simétrico, y éste viene dado por la fórmula:*

(5) $$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$$

En efecto:

$$(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = x * [y * (y^{-1} * x^{-1})] = x * [(y * y^{-1}) * x^{-1}] =$$
$$= x * (e * x^{-1}) = x * x^{-1} = e$$

Análogamente, se demuestra que también

$$(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = e$$

y que, por tanto, el simétrico de $x * y$ es $y^{-1} * x^{-1}$.

Teorema 3. *Si sobre un conjunto A se ha definido una ley asociativa $*$ y cada uno de sus elementos tiene simétrico, todos los elementos de A son regulares.*

En efecto:

$$x * y = x * z \implies x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * (x * z) \implies (x^{-1} * x) * y =$$
$$(x^{-1} * x) * z \implies e * y = e * z \implies y = z.$$

Luego x es regular por la izquierda. Análogamente se demuestra que x es también regular por la derecha y que, por tanto, es regular.

45. Propiedad distributiva

Sea A un conjunto dotado de dos leyes de composición interna $*$ y $\perp$. Diremos que la ley $*$ es *distributiva por la izquierda* con respecto a la ley $\perp$ si se verifica:

(1) $\qquad (\forall x)(\forall y)(\forall z)\colon \qquad x * (y \perp z) = (x * y) \perp (x * z)$

Análogamente, la ley $*$ es *distributiva* por *la derecha* con respecto a la ley $\perp$, si

(2) $\qquad (\forall x)(\forall y)(\forall z)\colon \qquad (y \perp z) * x = (y * x) \perp (z * x)$

Finalmente, si la ley $*$ es distributiva por la izquierda y por la derecha con respecto a la ley $\perp$, diremos simplemente que $*$ es *distributiva* con respecto a la ley $\perp$.

Teorema 1. *Si la ley $*$ es conmutativa y, además, es distributiva por la izquierda (o bien por la derecha) con respecto a la ley $\perp$, la ley $*$ es distributiva con respecto a la ley $\perp$.*

En efecto, si suponemos $*$ distributiva por la izquierda y conmutativa, tenemos:

$$x * (y \perp z) = (x * y) \perp (x * z) = (y * x) \perp (z * x),$$
$$x * (y \perp z) = (y \perp z) * x$$

de donde:

$$(y \perp z) * x = (y * x) \perp (z * x).$$

La última igualdad prueba que también $*$ es distributiva por la izquierda y que, por tanto, es distributiva con respecto a la ley $\perp$.

Análoga demostración se puede hacer si hubiéramos supuesto que $*$ es distributiva por la derecha.

Teorema 2. *Si $*$ es distributiva con respecto a la ley $\perp$ y ésta es asociativa, se tiene:*

(3) $$(x_1 \perp x_2) * (y_1 \perp y_2) = (x_1 * y_1) \perp (x_1 * y_2) \perp (x_2 * y_1) \perp (x_2 * y_2)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}(x_1 \perp x_2) * (y_1 \perp y_2) &= [x_1 * (y_1 \perp y_2)] \perp [x_2 * (y_1 \perp y_2)] = \\ &= [(x_1 * y_1) \perp (x_1 * y_2)] \perp [(x_2 * y_1) \perp (x_2 * y_2)] = \\ &= \{[(x_1 * y_1) \perp (x_1 * y_2)] \perp (x_2 * y_1)\} \perp (x_2 * y_2) = \\ &= (x_1 * y_1) \perp (x_1 * y_2) \perp (x_2 * y_1) \perp (x_2 * y_2).\end{aligned}$$

Ejemplos:

a) En $\boldsymbol{R}$, la multiplicación es distributiva con respecto a la suma, puesto que:

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z, \qquad (y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

En cambio, la suma no es distributiva con respecto al producto, puesto que, en general:

$$x+(y \cdot z) \neq (x+y) \cdot (x+z)$$

Si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son subconjuntos del conjunto universal $\boldsymbol{U}$, se tiene:

b) La intersección es distributiva con respecto a la reunión, puesto que (11):

$$\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})$$
$$(\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) \cap \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}) \cup (\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{A})$$

c) La reunión es distributiva con respecto a la intersección, puesto que

$$\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C})$$
$$(\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) \cup \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}) \cap (\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{A})$$

d) En $\boldsymbol{R}$, y en virtud del teorema 2 de este número, se tiene la conocida propiedad «desarrollo del producto de dos binomios»:

$$(x_1+x_2) \cdot (y_1+y_2) = x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$

46. Propiedades de las leyes de composición externa

Dados el dominio de operadores $\Omega \equiv \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ y otro conjunto distinto $\boldsymbol{A} \equiv \{x, y, z, \ldots\}$ y la ley de composición externa f definida así:

$$f: \quad (\alpha, x) \in \Omega \times \boldsymbol{A} \longrightarrow \alpha \cdot x \in \boldsymbol{A}$$

1.° Si el conjunto $\boldsymbol{A}$ está dotado de una ley interna $+$, que llamaremos *aditiva*, diremos que la ley externa es *distributiva* con respecto a la adición en $\boldsymbol{A}$, si se verifica:

(1) $$(\forall \alpha)(\forall x)(\forall y): \quad \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

2.° Si los conjuntos Ω y $\boldsymbol{A}$ están dotados de una ley de composición interna $+$, que llamaremos *aditiva*, diremos que la ley externa es *distributiva* con respecto a la adición en Ω, si se verifica:

(2) $$(\forall\,\alpha)\,(\forall\,\beta)\,(\forall\,x): \qquad (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$$

3.° Si el conjunto A está dotado de una ley interna $\cdot$, que llamaremos *multiplicativa*, diremos que hay una asociatividad *mixta* entre la ley externa y la multiplicación en A, si se verifica:

(3) $$(\forall\,\alpha)\,(\forall\,x)\,(\forall\,y): \qquad \alpha\cdot(x\cdot y)=(\alpha\cdot x)\cdot y=x\cdot(\alpha\cdot y)$$

4.° Si el conjunto Ω está dotado de una ley interna $\cdot$, que llamaremos *multiplicativa*, diremos que hay una *asociatividad mixta*, entre la ley externa y la multiplicación en Ω, si se verifica:

(4) $$(\forall\,\alpha)\,(\forall\,\beta)\,(\forall\,x): \qquad (\alpha\cdot\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)=\beta\cdot(\alpha\cdot x)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Estudiar, en el conjunto de los números naturales, la ley de composición definida por la igualdad siguiente:

$$x * y = \text{M. C. D.}\,(x, y)$$

Solución:

a) Tiene la propiedad de *clausura*, puesto que:

$$(\forall\, x)\,(\forall\, y): \qquad x * y = \text{M. C. D.}\,(x, y) \in N^*$$

b) Tiene la propiedad *asociativa*. En efecto, si

$$\text{M. C. D.}\,(x, y, z) = m, \quad \text{M. C. D.}\,(x, y) = m' \quad \text{y} \quad \text{M. C. D.}\,(y, z) = m'',$$

se tiene:

$$(x * y) * z = \text{M.C.D.}\,[(x * y), z] = \text{M.C.D.}\,[\text{M.C.D.}\,(x, y);\, z] = \text{M.C.D.}\,(m', z) = m.$$

Análogamente:

$$x * (y * z) = \text{M.C.D.}\,[x, (y * z)] = \text{M.C.D.}\,[x, \text{M.C.D.}\,(y, z)] = \text{M.C.D.}\,(x, m'') = m.$$

Luego:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

c) Tiene la propiedad *conmutativa*, puesto que:

$$x * y = \text{M. C. D.}\,(x, y) = \text{M. C. D.}\,(y, x) = y * x$$

d) No tiene *elemento neutro*, puesto que no existe ningún $e \in N^*$ tal que, para todo número natural x, se verifique:

$$\text{M. C. D.}\,(e, x) = x.$$

e) Por no tener elemento neutro la ley $*$, tampoco podrá tener *simétrico* ningún $x \in N^*$.

2. Estudiar, en el conjunto Q, la ley de composición definida por la igualdad siguiente:

$$x * y = \frac{x \cdot y}{2}$$

Solución:

a) Es cerrada con respecto al conjunto Q, puesto que:

$$(\forall x)(\forall y): \qquad x * y = \frac{x \cdot y}{2} \in Q$$

b) Tiene la propiedad *asociativa*, pues, en efecto:

$$(x * y) * z = \left(\frac{x \cdot y}{2}\right) * z = \frac{\frac{x \cdot y}{2} \cdot z}{2} = \frac{x \cdot \frac{y \cdot z}{2}}{2} = x * (y * z)$$

c) Tiene la propiedad conmutativa, puesto que:

$$x * y = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{y \cdot x}{2} = y * x$$

d) Tiene elemento *neutro*. En efecto, como la ley $*$ es conmutativa, bastará con que probemos que dicha ley tiene elemento neutro por la derecha (o bien por la izquierda). Ahora bien:

$$x * e = x \Longrightarrow \frac{x \cdot e}{2} = x \Longrightarrow e = 2$$

Luego el elemento neutro es $e = 2$.

e) Cada $x \neq 0$ de Q tiene *simétrico*, pues, en efecto:

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = \frac{x^{-1} \cdot x}{2} = e \Longrightarrow x^{-1} = \frac{4}{x}$$

3. Estudiar, en el conjunto Q, la ley de composición definida por la igualdad siguiente:

$$x * y = x + y + x \cdot y$$

Solución:

a) Tiene la propiedad de *clausura*, puesto que:

$$(\forall x)(\forall y): \qquad x * y = x + y + x \cdot y \in Q$$

b) Tiene la propiedad *asociativa,* pues, en efecto:

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y) + z + (x * y)\cdot z = \\ &= x + y + x\cdot y + z + (x + y + x\cdot y)\cdot z = \\ &= x + y + z + x\cdot y + x\cdot z + y\cdot z + x\cdot y\cdot z = \\ &= x + y + z + y\cdot z + x\cdot(y + z + y\cdot z) = \\ &= x + (y * z) + x\cdot(y * z) = x * (y * z).\end{aligned}$$

c) Tiene la propiedad *conmutativa,* pues, en efecto:

$$x * y = x + y + x\cdot y = y + x + y\cdot x = y * x$$

d) Tiene elemento *neutro.* En efecto:

$$x * e = x \Longrightarrow x + e + x\cdot e = x \Longrightarrow e = 0.$$

e) Cada $x \neq -1$ tiene *simétrico.* En efecto:

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = 0 \Longrightarrow x + x^{-1} + x\cdot x^{-1} = 0 \Longrightarrow x^{-1} = \frac{-x}{1 + x}$$

f) La ley $*$ no es *distributiva* con respecto a la suma, pues, en efecto:

$$x * (y + z) = x + (y + z) + x\cdot(y + z) = x + y + z + x\cdot y + x\cdot z$$

En cambio:

$$(x * y) + (x * z) = x + y + x\cdot y + x + z + x\cdot z$$

g) La ley $*$ no es *distributiva* con respecto al producto, pues, en efecto:

$$x * (y\cdot z) = x + (y\cdot z) + x\cdot(y\cdot z)$$

En cambio:

$$(x * y)\cdot(x * z) = (x + y + x\cdot y)\cdot(x + z + x\cdot z).$$

4. Estudiar, en el conjunto N^*, la ley de composición definida por la igualdad siguiente:

$$x * y = \frac{x + y}{2}$$

Solución:

a) No es *cerrada* con respecto al conjunto N^*, puesto que en infinitos casos $\frac{x+y}{2}$ no será un número natural; es decir:

$$\text{no } (\forall x)(\forall y): \qquad x * y \in N^*$$

b) No tiene la propiedad *asociativa*, puesto que

$$(x * y) * z = \frac{(x * y) + z}{2} = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} = \frac{x + y + 2z}{4}$$

En cambio:

$$x * (y * z) = \frac{x + (y * z)}{2} = \frac{x + \frac{y+z}{2}}{2} = \frac{2x + y + z}{4}$$

c) Tiene la propiedad *conmutativa*, pues, en efecto:

$$x * y = \frac{x+y}{2} = \frac{y+x}{2} = y * x.$$

d) No tiene elemento *neutro*. En efecto, si existiera elemento neutro e, se tendría:

$$x * e = x \Longrightarrow \frac{x+e}{2} = x \Longrightarrow e = x$$

Lo cual es absurdo, pues de existir elemento neutro debe ser único y no depender del número tomado.

e) Al no tener elemento neutro la ley $*$, tampoco podrá tener simétrico ningún $x \in N^*$.

f) La ley $*$ no es *distributiva* con respecto a la suma, pues, en efecto:

$$x * (y + z) = \frac{x + y + z}{2}$$

En cambio:

$$(x * y) + (x * z) = \frac{x+y}{2} + \frac{x+z}{2} = \frac{2x + y + z}{2}$$

g) La ley $*$ no es distributiva con respecto al producto, pues, en efecto:

$$x * (y \cdot z) = \frac{x + y \cdot z}{2}$$

En cambio:

$$(x * y) \cdot (x * z) = \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+z}{2} = \frac{x^2 + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z}{4}$$

5. Estudiar, en el conjunto $\boldsymbol{R}^+$, la ley de composición definida por la igualdad:

$$x * y = \frac{x \cdot y - 1}{x + y}$$

Solución:

a) No tiene la propiedad de *clausura*, puesto que $x * y < 0$ para los pares de números que verifican la inecuación

$$x \cdot y - 1 < 0.$$

b) Tiene la propiedad *asociativa*, pues, en efecto:

$$(x * y) * z = \frac{(x * y) \cdot z - 1}{(x * y) + z} = \frac{\dfrac{x \cdot y - 1}{x + y} \cdot z - 1}{\dfrac{x \cdot y - 1}{x + y} + z} =$$

$$= \frac{x \cdot y \cdot z - x - y - z}{x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z - 1} = \frac{x \cdot \dfrac{y \cdot z - 1}{y + z} - 1}{x + \dfrac{y \cdot z - 1}{y + z}} = x * (y * z)$$

c) Tiene la propiedad *conmutativa*. En efecto:

$$x * y = \frac{x \cdot y - 1}{x + y} = \frac{y \cdot x - 1}{y + x} = y * x.$$

d) No tiene elemento *neutro*. En efecto, si existiera elemento neutro e, se tendría:

$$x * e = x \implies \frac{x \cdot e - 1}{x + e} = x \implies 0 \cdot e = x^2 + 1 \implies 0 \cdot e \neq 0,$$

lo cual es absurdo.

e) Al no tener elemento neutro la ley $*$, tampoco podrá tener simétrico ningún elemento del conjunto dado.

f) La ley $*$ no es *distributiva* con respecto a la suma. En efecto:

$$x * (y+z) = \frac{x \cdot (y+z) - 1}{x + (y+z)} = \frac{x \cdot y + x \cdot z - 1}{x+y+z}$$

En cambio:

$$(x * y) + (x * z) = \frac{x \cdot y - 1}{x+y} + \frac{x \cdot z - 1}{x+z}$$

g) Tampoco la ley $*$ es *distributiva* con respecto al producto, puesto que:

$$x * (y \cdot z) = \frac{x \cdot (y \cdot z) - 1}{x + (y \cdot z)} = \frac{x \cdot y \cdot z - 1}{x + y \cdot z}$$

En cambio:

$$(x * y) \cdot (x * z) = \frac{x \cdot y - 1}{x+y} \cdot \frac{x \cdot z - 1}{x+z} = \frac{x^2 \cdot y \cdot z - x \cdot y - x \cdot z + 1}{x^2 + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z}$$

6. Estudiar, en el conjunto N^*, la ley de composición definida por la siguiente igualdad:

$$x * y = \begin{cases} x & \text{cuando} \quad x > y \\ y & \text{»} \quad y > x \end{cases}$$

Solución:

a) No tiene la propiedad de *clausura*, puesto que para todo par (x, y) de números de N^*, tales que $x = y$, se tiene:

$$x * y \notin N^*.$$

Es decir, la operación está definida solamente para los pares (x, y), tales que $x \neq y$.

b) Tiene la propiedad *asociativa*. En efecto, como los tres números x, y, z tienen que ser distintos entre sí; si fuera, por ejemplo: $x > y > z$, se tendría:

$$(x * y) * z = x * z = x.$$

Análogamente

$$x * (y * z) = x * y = x$$

y, por tanto:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

c) Tiene la propiedad *conmutativa*. En efecto, si fuera, por ejemplo:

$$x * y = y \Longrightarrow y > x \Longrightarrow y * x = y$$

o sea:

$$x * y = y * x.$$

d) Tiene elemento *neutro*. En efecto:

$$x * e = x \Longrightarrow e < x \Longrightarrow e = 1$$

Luego el elemento neutro es $e = 1$.

e) Ningún $x \in N^*$ tiene simétrico. En efecto:

1.° Si $x = 1$ tuviera simétrico x^{-1}, se tendría:

$$1 * x^{-1} = x^{-1} * 1 = 1 \Longrightarrow x^{-1} < 1$$

lo cual es absurdo, pues x^{-1} debe pertenecer a N^* y, por tanto, ser mayor que 1.

2.° Si $x > 1$ tuviera simétrico x^{-1}, se tendría:

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$$

lo cual es absurdo, pues el elemento compuesto con x y con x^{-1} tendría que ser mayor que 1.

7. Estudiar, en el conjunto N^*, las dos leyes de composición definidas por las igualdades siguientes:

$$x * y = 3x + 2y \qquad x \perp y = 4xy$$

Solución:

PRIMERA LEY:

a) Tiene la propiedad de *clausura*, pues:

$$(\forall x)(\forall y): \qquad x * y \in N^*$$

b) No tiene la propiedad *asociativa*. En efecto:

$$(x * y) * z = 3(x * y) + 2z = 3(3x + 2y) + 2z = 9x + 6y + 2z.$$

En cambio:

$$x * (y * z) = 3x + 2(y * z) = 3x + 2(3y + 2z) = 3x + 6y + 4z.$$

c) No tiene la propiedad *conmutativa*. En efecto:

$$x * y = 3x + 2y \qquad y * x = 3y + 2x.$$

d) No tiene elemento *neutro*. En efecto, si existiera elemento neutro *e*, se tendría:

$$x * e = x \implies 3x + 2e = x \implies e = -x.$$

Lo cual es absurdo.

e) Al no tener elemento neutro la ley $*$, tampoco podrá tener *simétrico* ningún elemento de N^*.

SEGUNDA LEY:

a) Tiene la propiedad de *clausura*, pues:

$$(\forall x)(\forall y): \qquad x \perp y \in N^*.$$

b) Tiene la propiedad *asociativa*. En efecto:

$$(x \perp y) \perp z = 4 \cdot (x \perp y) \cdot z = 4 \cdot (4xy) \cdot z = 16xyz =$$
$$= 4x \cdot (4yz) = 4x \cdot (y \perp z) = x \perp (y \perp z).$$

c) Tiene la propiedad *conmutativa*. En efecto:

$$x \perp y = 4xy = 4yx = y \perp x$$

d) No tiene elemento *neutro*. En efecto, si existiera elemento neutro *e*, se tendría:

$$x \perp e = x \implies 4xe = x \implies e = \tfrac{1}{4}$$

y como $\frac{1}{4} \notin N^*$, dicho $\frac{1}{4}$ no puede ser el elemento neutro de la ley $\perp$ en el conjunto N^*.

e) Al no tener elemento neutro la ley $\perp$, tampoco podrá tener *simétrico* ningún elemento de N^*.

PROPIEDADES QUE RELACIONAN LAS DOS LEYES:

a) La ley $*$ no es *distributiva* con respecto a la ley $\perp$. En efecto:

$$x * (y \perp z) = 3x + 2(4yz) = 3x + 8yz.$$

En cambio·

$$(x * y) \perp (x * z) = (3x + 2y) \perp (3x + 2z) = 4(3x + 2y)(3x + 2z) =$$
$$= 36x^2 + 24xy + 24xz + 16yz.$$

b) La ley $\perp$ es *distributiva* con respecto a la ley $*$. En efecto:

$$x \perp (y * z) = 4x(3y + 2z) = 12xy + 8xz = 3(4xy) + 2(4xz) =$$
$$= (4xy) * (4xz) = (x \perp y) * (x \perp z).$$

8. Sobre el conjunto $A \equiv \{1, 2, 3, 6\}$ designamos por $x * y$ al M. C. D. de x e y. Tabúlese esta ley.

Solución:

$*$	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Estudiar, en el conjunto $\boldsymbol{R}^{+}$, la ley de composición interna definida por la igualdad siguiente:

$$x * y = \frac{x+y}{xy+1}$$

Solución:

a) Cerrada.

b) Asociativa.

c) Conmutativa.

d) $e=0$.

e) Ningún $x \in \boldsymbol{R}^{+}$ tiene simétrico.

f) No distributiva con respecto a la suma.

g) No distributiva con respecto al producto.

2. Estudiar, en el conjunto $\boldsymbol{N}^{*}$, la ley de composición interna definida por la igualdad siguiente:

$$x * y = x$$

Solución:

a) Cerrada.

b) Asociativa.

c) No conmutativa.

***d)* Todo $x \in \boldsymbol{N}^{*}$ es neutro por la derecha.**

e) No distributiva con respecto a la suma.

f) No distributiva con respecto al producto.

3. Estudiar, en el conjunto $\boldsymbol{Z}$, la ley de composición interna definida por la igualdad siguiente:

$$x * y = |y-x|$$

Solución:

a) Cerrada.
b) No asociativa.
c) Conmutativa.
d) No tiene elemento neutro.
e) No tienen simétrico los elementos de **Z**.
f) No distributiva con respecto a la suma.
g) No distributiva con respecto al producto.

4. Estudiar, en el conjunto Q^+, la ley de composición interna definida por la igualdad siguiente:

$$x * y = x + \frac{1}{y}$$

Solución:

a) Cerrada.
b) No asociativa.
c) No conmutativa.
d) No tiene elemento neutro.
e) No tienen simétrico los elementos de Q^+.
f) No distributiva con respecto a la suma.
g) No distributiva con respecto al producto.

5. Si $x=(a, b)$, $y=(m, n)$, siendo a, b, m y n números enteros, estudiar, en el conjunto C de los números complejos, las leyes de composición interna definidas por las igualdades siguientes:

$$x+y=(a+m, b+n) \qquad x \cdot y=(a \cdot m, b \cdot n)$$

Solución:

PRIMERA LEY (Suma):

a) Cerrada.
b) Asociativa.
c) Conmutativa.
d) El elemento neutro es $e=(0, 0)$.
e) El simétrico de (a, b) es $x'=(-a, -b)$.

SEGUNDA LEY (Producto) *:

a) Cerrada.
b) Asociativa.
c) Conmutativa.
d) El $e=(1, 1)$ es el elemento neutro de $\boldsymbol{C}$.
e) Todo (a, b), siendo $a \neq 0$ y $b \neq 0$, tiene por simétrico

$$x' = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right).$$

PROPIEDADES QUE RELACIONAN LAS DOS LEYES:

a) Es distributivo el producto con respecto a la suma.
b) No es distributiva la suma con respecto al producto.

6. Estudiar, en el conjunto $\boldsymbol{R}^+$, la ley de composición interna definida por la igualdad siguiente:

$$x * y = E(x+y)$$

donde $E(x)$ es la aplicación «parte entera de x».

Solución:

a) Cerrada.
b) No asociativa.
c) Conmutativa.
d) No existe elemento neutro.
e) No tienen simétricos los elementos de $\boldsymbol{R}^+$.

7. Estudiar, en el conjunto $\boldsymbol{N}$, la ley de composición interna, «potenciación».

Solución:

a) Cerrada.
b) No asociativa.
c) No conmutativa.
d) El elemento neutro por la derecha es $e=1$.

---

* Aunque a esta segunda ley le llamamos «producto», no debe confundirse con el producto de dos números complejos:

$$(a, b) \cdot (m, n) = (am - bn, \ an + bm).$$

e) El simétrico por la derecha de todo $x \in N$ es el número 0.

f) No es distributiva con respecto a la suma.

g) No es distributiva con respecto al producto.

8. Estudiar, en el conjunto de los números pares, las leyes $x+y$, $x \cdot y$.

Solución:

1. *a)* Cerrada.
   b) Asociativa.
   c) Conmutativa.
   d) El elemento neutro es $e=0$.
   e) El simétrico de todo número par x, es $-x$.
   f) No es distributiva con respecto al producto.

2. *a)* Cerrada.
   b) Asociativa.
   c) Conmutativa.
   d) No tiene elemento neutro.
   e) Al no tener elemento neutro la ley $\cdot$, los elementos del conjunto dado no tienen simétrico.
   f) No es distributiva con respecto al producto.

9. Sobre el conjunto $A \equiv \{0, 1, 2, 5\}$ se designa con $x * y$ el resto de la división de x^y por 3. Tabúlese esta ley y explíquese por qué obtenemos una ley de composición interna.

10. ¿Es interna la ley $A \times B$ definida sobre la familia de conjuntos $\{A, B, C\}$?

11. Sobre el conjunto de los enteros mayores o iguales que uno, consideramos dos leyes de composición

$x * y$ designa el M. C. D. de x e y

$x \perp y$ » » m. c. m. » x e y

Pruébese que la multiplicación es distributiva con respecto a estas dos leyes.

12. Si sobre un conjunto A, dotado de una ley de composición interna, existen simultáneamente elemento neutro por la derecha y elemento neutro por la izquierda, ¿ambos deben coincidir?

13. Sobre todo conjunto A la ley definida por $x * y = y$ es claramente una ley interna. Estúdiese la asociatividad y la conmutatividad. Demuéstrese que todo elemento es neutro por la izquierda. Pruébese a partir del ejercicio anterior que no puede existir elemento neutro por la derecha.

6
estructuras algebraicas

47. Introducción

Al estudiar los conjuntos se habrá podido observar que una de sus características fundamentales es la de que sus elementos aparecen como amontonados o desordenados, es decir, sin ninguna relación o ley que los ligue.

A medida que se ha ido avanzando en el estudio de la Teoría de los Conjuntos, se habrá notado que los hemos ido «organizando» cada vez mejor; o sea, hemos ido estableciendo relaciones y leyes a las que deben obedecer los conjuntos, lo que ha traído como consecuencia una mayor complejidad y, por ende, una mejor organización o «estructuración» en los repetidos conjuntos.

La marcha seguida en el estudio de los conjuntos es un todo similar a la propia evolución de la Sociedad Humana, que partió de conjuntos de individuos sin apenas conexión entre ellos, salvo la existente entre los individuos de cada célula familiar, y que al correr del tiempo se fueron agrupando y jerarquizando, lo que condujo a establecer unas reglas o leyes de convivencia cada vez más perfectas y numerosas, cuyo objetivo fue siempre, al menos en teoría, dar una mejor organización o «estructuración» a los cada vez más numerosos grupos humanos.

Estructuras algebraicas. Conferir una *estructura algebraica* a un conjunto A es dotar a dicho conjunto de una o varias leyes de composición y de las relaciones que ligan dichas leyes. Una estructura algebraica queda determinada, pues, por las leyes de que está dotado el conjunto y por los axiomas que relacionan dichas leyes.

48. Isomorfismo

I. Sean A y B dos conjuntos equipotenciales y f una aplicación biyectiva de A sobre B. Si cada uno de los conjuntos A y B está dotado del mismo número de leyes de composición (una cada uno de ellos, por ejemplo) y son iguales los cuadros de axiomas que relacionan las leyes de cada conjunto, diremos que los conjuntos A y B tienen *igual estructura algebraica.*

Es de observar que los elementos que integran los conjuntos A y B pueden ser de naturaleza muy distinta, tales como números y entes geométricos, o bien puntos y empleos, etc.

II. Supongamos ahora que A está dotado de una ley binaria (unitaria) de composición interna $*$, y que B está a su vez dotado de una ley binaria (unitaria) de composición interna $\perp$.

Diremos que la biyección f es un *isomorfismo* de A sobre B si:

(1) $$(\forall x)(\forall y): \quad f(x * y) = f(x) \perp f(y)$$

o bien:

(2) $$(\forall x): \quad f(* x) = \perp f(x)$$

Se dice también que los conjuntos A y B son *isomorfos* con respecto a las leyes $*$ y $\perp$ para la aplicación f.

Las igualdades (1) y (2) pueden leerse como sigue:

a) *El transformado del elemento compuesto por dos elementos cualesquiera de* A *es el compuesto sobre* B*, por las imágenes de los elementos de* A.

b) *El transformado del resultado de hacer actuar la ley* $*$ *sobre un elemento cualquiera de* A *es igual al resultado en* B *de hacer actuar la ley* $\perp$ *sobre la imagen del elemento de* A.

Ejemplos:

1. Sea A el conjunto Z de los enteros relativos y la ley $*$ la adición, B el conjunto de los número de la forma 2^n, con $n \in Z$, y la ley $\perp$ la multiplicación.

La aplicación $f(n)=2^n$ es biyectiva (31), y como

$$f(n+n')=2^{n+n'}=2^n \cdot 2^{n'}=f(n) \cdot f(n'),$$

$f(n)$ es un isomorfismo de $\boldsymbol{Z}$ sobre $\boldsymbol{B}$ o, lo que es lo mismo, los conjuntos $\boldsymbol{Z}$ y $\boldsymbol{B}$ son isomorfismos con respecto a las leyes $+$ y $\cdot$, para la aplicación f.

2. Sea $\boldsymbol{A}$ el conjunto $\boldsymbol{R}^+$ de los números reales positivos y la ley $*$ la multiplicación, $\boldsymbol{B}$ el conjunto $\boldsymbol{R}$ de los números reales y la ley $\perp$ la suma, y, finalmente, $f(x)=\log x$ la aplicación biyectiva que transforma $\boldsymbol{R}^+$ en $\boldsymbol{R}$.

Ahora bien, como

$$f(x \cdot y)=\log (x \cdot y)=\log x+\log y=f(x)+f(y)$$

La logaritmación es un isomorfismo de $\boldsymbol{R}^+$ sobre $\boldsymbol{R}$ o, lo que es lo mismo, los conjuntos $\boldsymbol{R}^+$ y $\boldsymbol{R}$ son isomorfos con respecto a las leyes $\cdot$ y $+$, para la aplicación log.

Análogamente se deduce que los conjuntos $\boldsymbol{R}^+$ y $\boldsymbol{R}$ son isomorfos para las leyes:

a) División y resta para la aplicación log.

b) Elevación a la potencia α y multiplicar por α, para la aplicación log.

c) Extracción de la raíz n-ésima y dividir por n, para la aplicación log.

3. Sea $\boldsymbol{A}$ el conjunto $\boldsymbol{Z}$ de los enteros relativos y la ley $*$ la suma, $\boldsymbol{B}$ el conjunto de los números enteros pares relativos, y la ley $\perp$ la suma (también) y, finalmente, $f(n)=2n$ la aplicación biyectiva que transforma $\boldsymbol{Z}$ en $\boldsymbol{B}$.

Ahora bien, como

$$f(n+n')=2(n+n')=2n+2n'=f(n)+f(n').$$

La aplicación $f(n)$ es un isomorfismo de $\boldsymbol{Z}$ sobre $\boldsymbol{B}$ o, lo que es lo mismo, los conjuntos $\boldsymbol{Z}$ y $\boldsymbol{B}$ son isomorfos con respecto a las leyes $+$ y $+$, para la aplicación $f(n)=2n$.

Aplicación. Si los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son isomorfos con respecto a las operaciones $*$ y $\perp$, para la aplicación f, es decir, si:

$$f(x * y)=f(x) \perp f(y)$$

o bien

$$f(*\,x) = \perp f(x).$$

a) Podemos sustituir la operación $x * y$ de A por las operaciones siguientes:

1.° Hallamos $x' = f(x)$ e $y' = f(y)$ de B.

2.° Efectuamos la operación

$$f(x) \perp f(y) = z'$$

3.° Hallamos

$$x * y = f^{-1}(z')$$

Esta forma indirecta de calcular $x * y$ será ventajosa cuando

$$f(x),\ f(y) \quad \text{y} \quad f^{-1}(z')$$

sean fáciles de calcular y la operación $\perp$ de B sea más simple que la $*$ de A. Así se procede, por ejemplo, para calcular expresiones monomias por logaritmos.

Ejemplo:

Sea A el conjunto de los números reales positivos R^+, $*$ la multiplicación, B el conjunto R, $\perp$ la suma y, finalmente, $f(x) = \log x$.

Para calcular el producto $x \cdot y$ resulta práctico, especialmente cuando los factores tienen muchas cifras, proceder así:

1.° Hallar $x' = \log x$ e $y' = \log y$.

2.° Hallar $\log x + \log y = z'$.

3.° Hallar $x \cdot y = f^{-1}(z') = \text{antilog } z'$.

b) Podemos sustituir la operación $*\,x$ de A por las operaciones siguientes:

1.° Hallamos $x' = f(x)$ de B.

2.° Efectuamos la operación $\perp f(x) = z'$.

3.° Hallamos $*\,x = f^{-1}(z')$.

Ejemplo:

Sea $\boldsymbol{A}$ el conjunto $\boldsymbol{R}^+$, $*$ la elevación a la potencia α (siendo α un número fijo); $\boldsymbol{B}$ el conjunto $\boldsymbol{R}$, $\perp$ la multiplicación por el número fijo α y, finalmente, $f(x)=\log x$. Para calcular la potencia x^{α} resulta no sólo práctico, sino a veces el único camino (como ocurre, por ejemplo, para calcular $0{,}943^{352{,}487}$), proceder así:

1.° Hallar $x'=\log x$.

2.° Hallar $\alpha\cdot\log x=z'$.

3.° Hallar $x^{\alpha}=f^{-1}(z')$.

III. Si los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son isomorfos con respecto a las leyes de composición $*$ y $\perp$ para la aplicación biyectiva f, y

$$E(x, y, z, \ldots;\ *)=F(x, y, z, \ldots;\ *)$$

es una igualdad cuyos miembros están compuestos por elementos de $\boldsymbol{A}$ relacionados por la ley $*$; aplicando f, tendremos:

$$f[E(x, y, z, \ldots;\ *)]=f[F(x, y, z, \ldots,;\ *)]$$

Ahora bien, como $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son isomorfos, se tendrá:

$$E'[f(x), f(y), f(z), \ldots;\ \perp]=F'[f(x), f(y), f(z), \ldots;\ \perp]$$

es decir:

1. *Toda igualdad, cuyos miembros estén compuestos, según la ley* $*$, *por elementos de* $\boldsymbol{A}$, *implica otra igualdad en* $\boldsymbol{B}$, *análogamente formada por las imágenes de los elementos de* $\boldsymbol{A}$, *pero relacionadas según la ley* $\perp$.

Así, por ejemplo:

$$(x * y) * z = x * (y * z) \Longrightarrow [f(x) \perp f(y)] \perp f(z) = $$
$$= f(x) \perp [f(y) \perp f(z)]$$

$$x * y = y * x \Longrightarrow f(x) \perp f(y) = f(y) \perp f(x)$$

$$x * e = x \Longrightarrow f(x) \perp f(e) = f(x)$$

$$x^{-1} * x = e \Longrightarrow f(x^{-1}) \perp f(x) = f(e)$$

Por tanto:

2. *Toda propiedad de la ley $*$ (asociativa, conmutativa, elemento neutro, inverso) en $\boldsymbol{A}$, lo es también de la ley $\perp$ en $\boldsymbol{B}$.*

De esta última conclusión, y teniendo en cuenta la definición dada en I, podemos concluir que los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ tienen igual estructura algebraica, luego:

Si dos conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son isomorfos, con respecto a las leyes de composición $*$ y $\perp$ para la aplicación biyectiva f, dichos conjuntos tienen igual estructura algebraica.

IV. Más general: Si los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son isomorfos con respecto a los sistemas de igual número de leyes de composición $*, \perp, \ldots$ y $\top, \wedge, \ldots$ para la aplicación biyectiva f, y

$$E(x, y, z, \ldots; *, \perp, \ldots) = F(x, y, z, \ldots; *, \perp, \ldots)$$

es una igualdad cuyos miembros están compuestos por elementos de $\boldsymbol{A}$ relacionados por las leyes $*, \perp, \ldots$, aplicando f, tendremos:

$$f[E(x, y, z, \ldots; *, \perp, \ldots)] = f[E(x, y, z, \ldots; *, \perp, \ldots)]$$

Ahora bien, como $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son isomorfos, se tendrá:

$$E'[f(x), f(y), f(z), \ldots; \top, \wedge, \ldots] = F'[f(x), f(y), f(z), \ldots; \top, \wedge, \ldots]$$

es decir:

Toda igualdad cuyos miembros estén compuestos por elementos de $\boldsymbol{A}$ relacionados según sus leyes, implica otra igualdad en $\boldsymbol{B}$, análogamente formada por las imágenes de los elementos de $\boldsymbol{A}$, pero relacionadas según las leyes de $\boldsymbol{B}$.

Ejemplo:

$$(\sqrt[n]{x/y})^m = \sqrt[n]{x^m/y^m} \implies m \cdot \frac{\log x - \log y}{n} =$$

$$= \frac{m \cdot \log x - m \cdot \log y}{n}$$

CONSECUENCIA. Procediendo en forma análoga a como se hizo en III, se deduce fácilmente que:

Si dos conjuntos A *y* B *son isomorfos con respecto a los sistemas de igual número de leyes de composición* $*, \perp \ldots$ *y* $\top, \wedge, \ldots$, *para la aplicación biyectiva f, dichos conjuntos tienen igual estructura algebraica.*

49. Algebra de las partes del conjunto universal

Si U es el conjunto universal y $P(U)$ el conjunto de las partes de U (6), llamaremos estructura algebraica de $P(U)$ a cualquier estructura que posea al menos una ley de composición; en cambio, toda estructura de $P(U)$ que posea al menos dos leyes de composición se llama *álgebra.*

Las leyes de composición $\cap$ y $\cup$ otorgan, pues, al conjunto $P(U)$ la jerarquía de álgebra.

Algebra de Boole. Se llama *álgebra de Boole* a toda estructura que posea las leyes $\cap$, $\cup$ y $'$ (complementación), relacionadas entre sí por los axiomas siguientes:

1.°	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.	Asociatividad.
2.°	$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$	Conmutatividad.
3.°	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.	Distributividad.
4.°	$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A$.	Absorción.
5.°	$A \cap A = A, \quad A \cup A = A$.	Idempotencia.
6.°	$(A \cap B)' = A' \cup B', \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$	Dualidad.
7.°	$A \cap A' = O, \quad A \cup A' = U$.	Complementariedad.

Como al conjunto $P(U)$ se le puede dotar de las leyes $\cap$, $\cup$ y $'$ y los subconjuntos pertenecientes a él, verifican las relaciones 1.° a 7.° anteriores (10., 11., 12. y 13.); la estructura que determina dichas leyes y propiedades es un álgebra de Boole.

50. Estructura de grupo

Se dice que un conjunto no vacío, G, dotado de una ley interna $*$, tiene estructura de *grupo*, si dicha ley posee las propiedades siguientes:

1.º $(\forall x)(\forall y)$: $x * y \in G$ Clausura.

2.º $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$: $(x * y) * z = x * (y * z)$ Asociativa.

3.º $(\forall x)(\exists e)$: $x * e = e * x = x$ Existencia de neutro.

4.º $(\forall x)(\exists x^{-1})$: $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ Existencia de simétrico.

Si, además, la ley $*$ es conmutativa, es decir, si:

5.º $(\forall x)(\forall y)$: $x * y = y * x$ Conmutativa.

se dice que el grupo es *conmutativo* o *abeliano*. Las propiedades anteriores son los *axiomas del grupo*.

Ejemplos:

a) Si G es el conjunto de los enteros relativos Z y la ley interna establecida es la adición, ésta confiere al conjunto Z estructura de grupo conmutativo.

b) La multiplicación confiere al conjunto de los números racionales no nulos estructura de grupo conmutativo.

En cambio, la suma no confiere estructura de grupo al conjunto N^* de los enteros positivos, puesto que no se cumplen las propiedades 3.º y 4.º.

Isomorfismo. Sean G y G' dos conjuntos isomorfos con respecto a las leyes $*$ y $\perp$ para la aplicación f.

Si la ley $*$ confiere a G estructura de grupo, la ley $\perp$ también otorga estructura de grupo al conjunto G' (48.III.2).

PROPIEDADES DE LOS GRUPOS:

1.º *El elemento neutro es único* (43. Teorema 2).

2.º *El elemento simétrico es único* (44. Teorema 1).

3.° *Todos los elementos de un grupo son regulares* (44. Teorema 3).

4.° *Las ecuaciones*

$$a * x = b \quad \text{e} \quad y * c = d$$

admiten solución única.

En efecto:

$$a * x = b \iff a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b \iff (a^{-1} * a) * x = \\ = a^{-1} * b \iff x = a^{-1} * b$$

$$y * c = d \iff (y * c) * c^{-1} = d * c^{-1} \iff y * (c * c^{-1}) = \\ = d * c^{-1} \iff y = d * c^{-1}$$

Nomenclatura. I. Si la ley de composición se representa por $\cdot$, o por ausencia de signo, el grupo se llama *multiplicativo.*

El elemento compuesto por dos elementos de G es su *producto* y los elementos son los factores.

El elemento neutro es la *unidad* del grupo y se representa por uno de los signos e, 1, I, ...

El elemento simétrico de un elemento dado x es su *inverso* y se representa por x^{-1}.

El producto de n factores x se representa por x^n.

Las soluciones de las ecuaciones

$$a \cdot x = b \quad \text{e} \quad y \cdot c = d$$

se representan, respectivamente, por:

$$x = a^{-1} \cdot b \quad \text{e} \quad y = d \cdot c^{-1}$$

Si el grupo es abeliano, se representan por:

$$x = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad y = \frac{d}{c}$$

II. Si la ley se representa por $+$, el grupo se llama *aditivo.*

El compuesto por dos elementos es la *suma* y los elementos los *sumandos.*

El elemento neutro es el *cero* y se representa por 0.

El simétrico de un elemento x es su *opuesto* y se representa por $-x$.

La suma de n sumandos x se representa por $n \cdot x$.

Las soluciones de las ecuaciones

$$a+x=b \quad \text{e} \quad y+c=d$$

se representan por

$$x=b-a \quad \text{e} \quad y=d-c$$

En particular, las soluciones de las ecuaciones

$$a+x=0 \quad \text{e} \quad y+c=0$$

son:

$$x=-a \quad \text{e} \quad y=-c$$

Propiedad involutiva. *El opuesto del opuesto de un elemento es éste,* es decir:

$$-(-x)=x$$

En efecto:

$$(-x)+[-(-x)]=0 \implies x+(-x)+[-(-x)]=x+0 \implies$$
$$\implies 0+[-(-x)]=x+0 \implies -(-x)=x.$$

Observación. La ley aditiva + está reservada exclusivamente a ciertos grupos conmutativos.

Subgrupos. Si una parte G' de un grupo G es a su vez un grupo con respecto a la misma ley, se dice que G' es un *subgrupo* de G.

51. Estructura de anillo

Si a un grupo abeliano A, que llamaremos aditivo, le dotamos de una segunda ley, llamada multiplicación, que es cerrada, asociativa y distributiva con respecto a la primera, diremos que al conjunto A le hemos conferido estructura de *anillo.*

Es decir, el conjunto A tiene estructura de anillo si está dotado de las leyes internas + y $\cdot$, y éstas poseen las propiedades siguientes:

Axiomas de la adición

1.° $(\forall x)(\forall y)$: $\quad x+y\in A$ — Clausura.

2.° $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$: $\quad (x+y)+z=x+(y+z)$ — Asociatividad.

3.° $(\forall x)(\exists 0)$: $x+0=0+x=x$ Existencia de cero.

4.° $(\forall x)(\exists -x)$: $x+(-x)=(-x)+x=0$ Existencia de opuesto.

5.° $(\forall x)(\forall y)$: $x+y=y+x$ Conmutatividad.

Axiomas de la multiplicación

1.° $(\forall x)(\forall y)$: $x\cdot y\in A$ Clausura.

2.° $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$: $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ Asociatividad.

Axiomas que relacionan las dos leyes

1.° $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

2.° $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$: $(y+z)\cdot x=y\cdot x+z\cdot x$

Distributividad.

Puede suceder que la multiplicación verifique uno o los dos axiomas siguientes:

Otros axiomas de la multiplicación

3.° $(\forall x)(\exists 1)$: $x\cdot 1=1\cdot x=x$ Existencia de unidad.

4.° $(\forall x)(\forall y)$: $x\cdot y=y\cdot x$ Conmutatividad.

Si se verifica el 3.° (además de los anteriores), A es un anillo *unitario*.

Si el que se verifica es el 4.°, el anillo es *conmutativo*.

Finalmente, si se verifican el 3.° y el 4.°, el anillo es *unitario* y *conmutativo*.

Ejemplos:

a) El conjunto de los números relativos $\mathbf{Z}$ es un anillo unitario conmutativo.
Obsérvese que sus elementos (salvo 1 y -1) carecen de inverso.

b) El conjunto de los números pares es un anillo conmutativo.
Obsérvese que no es unitario, pues no existe ningún número par que multiplicado por x dé como producto el propio x.

c) En el capítulo siguiente veremos cómo el conjunto de las matrices cuadradas es un anillo unitario, pero no conmutativo.

Propiedades. Como el conjunto A, por ser anillo, ha de tener estructura de grupo abeliano para la suma, todas las propiedades de los grupos subsistirán en los anillos, y por supuesto que tendrá otras específicas de los anillos.

1.° Para todo $x \in A$, se tiene:

$$x \cdot 0 = 0 \tag{1}$$

En efecto, por el tercer axioma de la adición, para cualquier $y \in A$, se tiene:

$$y + 0 = y \implies x \cdot (y + 0) = x \cdot y$$

de donde (distributividad y existencia de neutro):

$$x \cdot y + x \cdot 0 = x \cdot y = x \cdot y + 0 \implies x \cdot y + x \cdot 0 = x \cdot y + 0$$

Simplificando (44. Teorema 3), tenemos, como se quería probar:

$$x \cdot 0 = 0.$$

Análogamente se demuestra que:

$$0 \cdot x = 0 \tag{2}$$

2.° Para todo x e y pertenecientes a A, se tiene:

$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y) \tag{3}$$

En efecto:

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = [(-x) + x] \cdot y = 0 \cdot y = 0 \implies (-x) \cdot y + x \cdot y = 0,$$

de donde:

$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$$

Análogamente se demuestra que:

$$x \cdot (-y) = -(x \cdot y) \tag{4}$$

Si aplicamos sucesivamente (3) y (4), tenemos:

$$(-x) \cdot (-y) = -[x \cdot (-y)] = -[-(x \cdot y)] = x \cdot y,$$

es decir:

(5) $$(-x)\cdot(-y)=x\cdot y.$$

Esta segunda propiedad nos prueba la validez de la regla de los signos en los anillos.

52. Anillo de integridad

Un anillo A es siempre simplificable para la adición (50. 3.ª propiedad). En cambio, la ley de la simplificación no siempre será válida para la multiplicación, es decir: la igualdad $x\cdot z=y\cdot z$ no necesariamente implica $x=y$.

Se impone, pues, estudiar bajo qué condiciones es lícita la ley de la simplificación para la multiplicación.

Teorema. *En un anillo A, el producto de dos elementos distintos de cero es distinto de cero si, y sólo si, la ley de simplificación para la multiplicación es válida sobre dicho anillo.*

Directo: Vamos a demostrar que si el producto de dos elementos diferentes de cero es distinto de cero, el anillo es simplificable para la multiplicación.

En efecto, si

$$x\neq 0, \quad y\neq 0 \quad \text{y} \quad x\cdot y\neq 0$$

y partimos de la igualdad $x\cdot z=y\cdot z$ con $z\neq 0$, se tiene:

$$x\cdot z=y\cdot z \implies x\cdot z-y\cdot z=0 \implies (x-y)\cdot z=0$$

y como $z\neq 0$, tendrá que ser:

$$x-y=0 \implies x=y$$

Análogamente se puede demostrar que

$$z\cdot x=z\cdot y \implies x=y$$

y que, por tanto, el anillo es simplificable para la multiplicación.

CONTRARIO: Vamos a demostrar ahora que si el producto de dos elementos diferentes de cero es nulo, el anillo no es simplificable para la multiplicación.

En efecto, si

$$y \neq 0, \quad z \neq 0 \quad \text{e} \quad y \cdot z = 0$$

siendo x un elemento cualquiera de A, se tendrá:

$$x \cdot z = x \cdot z + y \cdot z = (x+y) \cdot z \implies x \cdot z = (x+y) \cdot z$$

Ahora bien, si A fuera simplificable para la multiplicación se tendría:

$$x = x + y \implies y = 0$$

lo cual es absurdo, pues va en contra de la hipótesis.

Se llama *anillo de integridad* a todo anillo conmutativo que sea simplificable para la multiplicación.

En cambio, se llama *dominio de integridad* a todo anillo de integridad cuya multiplicación tenga elemento neutro (unidad).

En los anillos que no son de integridad existen ciertos elementos distintos de cero, cuyo producto es nulo; se les llama *divisores de cero.*

Finalmente, se llama *subanillo* del anillo A a todo subconjunto de A que a su vez es un anillo con respecto a las mismas leyes.

Así, por ejemplo, el conjunto de los enteros pares de $\mathbf{Z}$ es un subanillo de $\mathbf{Z}$.

Más general, el conjunto de los múltiplos de un entero x es un subanillo de $\mathbf{Z}$.

53. Estructura de cuerpo

Se llama *cuerpo conmutativo* a todo anillo K cuyos elementos no nulos forman un grupo abeliano con respecto a la multiplicación.

Es decir, el conjunto K tiene estructura de cuerpo conmutativo si dicho conjunto está dotado de las leyes internas $+$ y $\cdot$, y éstas poseen las propiedades siguientes:

Axiomas de la adición

1.° $(\forall x)(\forall y)$: $x+y \in \boldsymbol{K}$ Clausura.

2.° $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$: $(x+y)+z=x+(y+z)$ Asociatividad.

3.° $(\forall x)(\forall y)$: $x+y=y+x$ Conmutatividad.

4.° $(\forall x)(\exists 0)$: $x+0=0+x=x$ Existencia de cero.

5.° $(\forall x)(\exists -x)$: $x+(-x)=(-x)+x=0$ Existencia de opuesto.

Axiomas de la multiplicación

1.° $(\forall x)(\forall y)$: $x \cdot y \in \boldsymbol{K}$ Clausura.

2.° $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ Asociatividad.

3.° $(\forall x)(\forall y)$: $x \cdot y = y \cdot x$ Conmutatividad.

4.° $(\forall x)(\exists 1)$: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ Existencia de unidad.

5.° $(\forall x, x \neq 0)(\exists x^{-1})$: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ Existencia de inverso.

Axioma que relaciona las dos leyes

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)$: $\begin{array}{l} x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \\ (y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \end{array}$ Distributividad.

Si el conjunto $\boldsymbol{K}$ posee todas las propiedades anteriores, salvo la conmutatividad con respecto a la multiplicación, diremos simplemente que $\boldsymbol{K}$ tiene estructura de cuerpo.

Ejemplos:

Tienen estructura de cuerpo conmutativo:

a) El conjunto $\boldsymbol{Q}$ de los números racionales.

b) El conjunto $\boldsymbol{R}$ de los números reales.

c) El conjunto $\boldsymbol{C}$ de los números complejos.

Propiedades. Siendo un cuerpo un caso particular de anillo, aquél tendrá todas las propiedades de éste y otras nuevas que serán las específicas de los cuerpos.

1.° *La ley de la simplificación para la multiplicación es válida para los elementos distintos de cero* (44. Teorema 3).

2.° *Si* $a \neq 0$, *la ecuación* $ax=b$ *admite solución única.*

La solución $x=a^{-1}\cdot b=b\cdot a^{-1}$ (50. 4.ª propiedad), que también se escribe en la forma $\frac{b}{a}$, se llama *cociente* o *razón* de los elementos b y a.

Aunque los cuerpos tienen otras propiedades, como son las de igualdad, suma, producto y cociente de razones, las omitimos por razones de brevedad y porque, además, suponemos al lector familiarizado con ellas.

Subcuerpo. Se llama *subcuerpo* del cuerpo $\boldsymbol{K}$ a todo subconjunto de éste, que a su vez es un cuerpo con respecto a las mismas leyes.

54. Estructura de espacio vectorial

Sea $\boldsymbol{E} \equiv \{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}', \boldsymbol{V}'', \ldots\}$ un conjunto con estructura de grupo aditivo abeliano, sobre el que supondremos se ha definido una igualdad, y $\boldsymbol{K} \equiv \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ otro conjunto (dominio de operadores) con estructura de cuerpo.

Si dotamos al conjunto $\boldsymbol{E}$ de una ley de composición externa que haga corresponder a cada par $(\alpha, \boldsymbol{V})$ un elemento bien determinado de $\boldsymbol{E}$, elemento que designaremos con la notación $\alpha\cdot\boldsymbol{V}$, diremos que al conjunto $\boldsymbol{E}$ se le ha conferido una estructura de *espacio vectorial*, o para ser más precisos, que el conjunto $\boldsymbol{E}$ es un *espacio vectorial sobre el cuerpo* $\boldsymbol{K}$.

A los elementos de $\boldsymbol{E}$ se les llama *vectores*.

Los grupos de axiomas siguientes confieren, pues, al conjunto $\boldsymbol{E}$, estructura de espacio vectorial sobre $\boldsymbol{K}$.

Axiomas de la igualdad

1.°	$(\forall \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{V} \in \boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}$	Reflexiva.
2.°	$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}' \Longrightarrow \boldsymbol{V}'=\boldsymbol{V}$	Simétrica.
3.°	$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}'$ y $\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{V}'' \Longrightarrow \boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}''$	Transitiva.

Axiomas de grupo aditivo abeliano de $\boldsymbol{E}$

1.°	$(\forall \boldsymbol{V})(\forall \boldsymbol{V}')$: $\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}' \in \boldsymbol{E}$	Clausura.
2.°	$(\forall \boldsymbol{V})(\forall \boldsymbol{V}')(\forall \boldsymbol{V}'')$: $(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}')+\boldsymbol{V}''=\boldsymbol{V}+(\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{V}'')$	Asociatividad.
3.°	$(\forall \boldsymbol{V})(\forall \boldsymbol{V}')$: $\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{V}$	Conmutatividad.
4.°	$(\forall \boldsymbol{V})(\exists \boldsymbol{O})$: $\boldsymbol{V}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}$	Existencia de neutro.
5.°	$(\forall \boldsymbol{V})(\exists -\boldsymbol{V})$: $\boldsymbol{V}+(-\boldsymbol{V})=(-\boldsymbol{V})+\boldsymbol{V}=\boldsymbol{O}$	Existencia de opuesto.

Axiomas de cuerpo de $\boldsymbol{K}$

Los indicados en 53.

Axiomas de la ley externa

1.°	$(\forall \alpha)(\forall \boldsymbol{V})$: $\alpha \cdot \boldsymbol{V} \in \boldsymbol{E}$	Clausura.
2.°	$(\forall \alpha)(\forall \boldsymbol{V})(\forall \boldsymbol{V}')$: $\alpha \cdot (\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}')=\alpha \cdot \boldsymbol{V}+\alpha \cdot \boldsymbol{V}'$	Distributividad.
3.°	$(\forall \alpha)(\forall \beta)(\forall \boldsymbol{V})$: $(\alpha+\beta) \cdot \boldsymbol{V}=\alpha \cdot \boldsymbol{V}+\beta \cdot \boldsymbol{V}$	
4.°	$(\forall \alpha)(\forall \beta)(\forall \boldsymbol{V})$: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \boldsymbol{V}=\alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{V})=\beta \cdot (\alpha \cdot \boldsymbol{V})$	Asociatividad.
5.°	$(\forall \boldsymbol{V})$: $1 \cdot \boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}$	El elemento unidad de $\boldsymbol{K}$ es neutro.

Ejemplos:

a) Si en el conjunto $\boldsymbol{E}$ de los vectores de un plano se da la definición de igualdad de vectores y se dota a dicho conjunto de una ley de composición interna aditiva abeliana, y $\boldsymbol{K}$ es el cuerpo de los números reales, y, finalmente, proveemos al conjunto $\boldsymbol{E}$ de una ley de composición externa, concretamente «multiplicación por un escalar».

El conjunto $\boldsymbol{E}$ ha quedado estructurado como un espacio vectorial sobre el cuerpo $\boldsymbol{R}$ de los números reales.

b) El conjunto $\boldsymbol{E}$ de los polinomios es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\boldsymbol{R}$ de los números reales. En este caso, la definición de igualdad en $\boldsymbol{E}$ es la conocida definición de identidad de polinomios; la ley interna es la adición y la externa la multiplicación por una constante tomada de $\boldsymbol{R}$.

c) Si fuera $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{K}$, podríamos tomar el cuerpo $\boldsymbol{K}$ como un espacio vectorial sobre sí mismo. La definición de igualdad sería la correspondiente en $\boldsymbol{K}$; la ley interna sería la adición y la externa la multiplicación.

Propiedades. Para todo $\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{E}$ se tiene:

1.ª $$0\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{O}$$

En efecto:

$$\lambda\cdot\boldsymbol{V}=(\lambda+0)\cdot\boldsymbol{V}=\lambda\cdot\boldsymbol{V}+0\cdot\boldsymbol{V}\Longrightarrow\lambda\cdot\boldsymbol{V}+\boldsymbol{O}=\lambda\cdot\boldsymbol{V}+0\cdot\boldsymbol{V}\Longrightarrow 0\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{O}$$

Para todo $\lambda\in\boldsymbol{K}$, se tiene:

2.ª $$\lambda\cdot\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$$

En efecto:

$$\lambda\cdot\boldsymbol{V}=\lambda\cdot(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{O})=\lambda\cdot\boldsymbol{V}+\lambda\cdot\boldsymbol{O}\Longrightarrow\lambda\cdot\boldsymbol{V}+\boldsymbol{O}=\lambda\cdot\boldsymbol{V}+\lambda\cdot\boldsymbol{O}\Longrightarrow\lambda\cdot\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}.$$

Recíprocamente, la relación

3.ª $$\lambda\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{O}$$

implica uno de estos tres casos: *a)* $\lambda=0$ y $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{O}$; *b)* $\lambda\neq 0$, $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{O}$, y *c)* $\boldsymbol{V}\neq\boldsymbol{O}$, $\lambda=0$.

El que siendo $\lambda \neq 0$ y $\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{O}$ pueda darse $\lambda \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{O}$ es imposible, como lo prueba la propiedad siguiente:

Si $\lambda \neq 0$ y $\boldsymbol{V} \neq 0$, tendrá que ser:

4.ª $$\lambda \cdot \boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{O}.$$

En efecto, si fuera:

$$\lambda \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{O} \Longrightarrow \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot \boldsymbol{V}) = \lambda^{-1} \cdot \boldsymbol{O} \Longrightarrow (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{O} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 1 \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{O} \Longrightarrow \boldsymbol{V} = \boldsymbol{O},$$

en contra de la hipótesis.

Para todo $\lambda \in \boldsymbol{K}$, se tiene:

5.ª $$(-\lambda) \cdot \boldsymbol{V} = -(\lambda \cdot \boldsymbol{V})$$

En efecto:

$$(-\lambda) \cdot \boldsymbol{V} + \lambda \cdot \boldsymbol{V} = [(-\lambda) + \lambda] \cdot \boldsymbol{V} = 0 \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{O} \Longrightarrow (-\lambda) \cdot \boldsymbol{V} + \lambda \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{O},$$

de donde:

$$(-\lambda) \cdot \boldsymbol{V} = -(\lambda \cdot \boldsymbol{V})$$

Para todo $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{E}$, se tiene:

6.ª $$\lambda \cdot (-\boldsymbol{V}) = -(\lambda \cdot \boldsymbol{V})$$

En efecto:

$$\lambda \cdot (-\boldsymbol{V}) + \lambda \cdot \boldsymbol{V} = \lambda \cdot [(-\boldsymbol{V}) + \boldsymbol{V}] = \lambda \cdot \boldsymbol{O} \Longrightarrow \lambda \cdot (-\boldsymbol{V}) + \lambda \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{O},$$

de donde:

$$\lambda \cdot (-\boldsymbol{V}) = -(\lambda \cdot \boldsymbol{V})$$

7.ª $$(-\lambda)\cdot(-V)=\lambda\cdot V.$$

En efecto:

$$(-\lambda)\cdot(-V)=-[\lambda\cdot(-V)]=-[-(\lambda\cdot V)]=\lambda\cdot V.$$

55. Espacio vectorial de sucesiones finitas

Sea K un cuerpo cualquiera, por ejemplo, el conjunto R de los números reales, y $E=K^n$, el conjunto formado por todas las sucesiones ordenadas de n elementos cualesquiera tomados de K será, pues:

$$V=(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Los números x_1, x_2, ..., x_n son las *componentes* o *coordenadas canónicas* del vector V.

1. Diremos que dos vectores

$$V=(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{y} \quad V'=(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

son iguales si, y sólo si,

$$x_i=x'_i \quad \text{para} \quad i=1, 2, \dots, n.$$

2. Suma de dos vectores V y V' es el vector

$$W=(x_1+x'_1, x_2+x'_2, \dots, x_n+x'_n)$$

Expresaremos que el vector W es suma de los vectores V y V' en la forma habitual

$$W=V+V'$$

Es inmediato que la operación suma así definida es cerrada, conmutativa, asociativa, admite como neutro el $O=(0, 0, \dots, 0)$ y que cada vector $V=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ admite un opuesto $-V=(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

3. La ley externa la definimos así: Producto del escalar λ por el vector $V=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el vector:

$$\lambda\cdot V=(\lambda\cdot x_1, \lambda\cdot x_2, \dots, \lambda\cdot x_n)$$

Fácil es probar que la ley así definida verifica los axiomas de la ley externa.

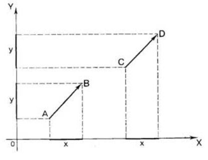
Y puesto que se cumplen todos los axiomas de los espacios vectoriales, podemos concluir que $\boldsymbol{K}^n$ es un espacio vectorial sobre $\boldsymbol{K}$, o bien que el conjunto $\boldsymbol{K}^n$ es el espacio de los vectores de orden n sobre el cuerpo $\boldsymbol{K}$.

Finalmente, diremos que $\boldsymbol{K}^n$ es un espacio vectorial n-dimensional sobre el cuerpo $\boldsymbol{K}$.

Representación gráfica de $\boldsymbol{K}^n$. I. Si $n=2$, se prefiere en este caso, representar las coordenadas de $\boldsymbol{V}$ con x e y, es decir:

$$\boldsymbol{V}=(x, y).$$

Supuesto trazado en un plano un sistema cartesiano rectangular, adoptaremos como representación gráfica del vector $\boldsymbol{V}=(x, z)$ a



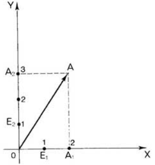
todo segmento orientado $\boldsymbol{AB}$ cuya proyección ortogonal sobre el eje X sea x, y cuya proyección ortogonal sobre el eje Y sea y.

Con la palabra «vector» designaremos indistintamente la pareja ordenada de números (x, y), o bien cada segmento orientado $\boldsymbol{AB}$ cuyas proyecciones ortogonales sobre los ejes X e Y sean x e y, respectivamente.

Es inmediato que cada vector (x, y) tiene como representación gráfica infinitos vectores $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{CD}$, ... equipolentes * entre sí.

Ejemplos:

El vector $\boldsymbol{V}=(2, 3)$ tiene, como sabemos, infinitas representaciones gráficas; pero es obvio que la más simple es el vector $\boldsymbol{OA}$, que tiene como origen el origen de coordenadas y cuyas proyecciones ortogonales sobre los ejes X e Y valen 2 y 3, respectivamente, o lo que es lo mismo, las coordenadas del extremo A del vector son 2 y 3.



Obsérvese que: $\boldsymbol{V}_1=(2, 0)$ es el vector $\boldsymbol{OA}_1$; $\boldsymbol{V}_2=(0, 3)$ es el vector $\boldsymbol{OA}_2$; $\boldsymbol{e}_1=(1, 0)$ es el vector $\boldsymbol{OE}_1$ y, finalmente, que $\boldsymbol{e}_2=(0, 1)$ es el vector $\boldsymbol{OE}_2$.

En el espacio bidimensional $\boldsymbol{K}^2$, a los vectores $\boldsymbol{e}_1=(1, 0)$ y $\boldsymbol{e}_2=(0, 1)$ se les llama *vectores unidad.*

Un espacio vectorial bidimensional tiene, pues, dos vectores unidad.

* Vectores equipolentes son los que tienen igual dirección, longitud y sentido.

El vector nulo es el $\mathbf{0}=(0,0)$; por tanto, el vector nulo tiene como representación gráfica cualquier punto del plano y, en particular, el origen de coordenadas.

Isomorfismo en K^2. El conjunto K^2 de todos los vectores (numéricos) es isomorfo con respecto al conjunto K^2 de todos los vectores (geométricos) del plano.

Vectores libres. Como la equipolencia de vectores es una relación de equivalencia (24), esta relación nos permite clasificar el conjunto K^2 en clases de equivalencia (25). Para ello, si V, V' V'', ... es un conjunto completo de vectores de K^2, dos a dos no equivalentes (equipolentes), el conjunto cociente (26).

$$\frac{K^2}{R}=\{C(V), C(V'), C(V''), \ldots\}$$

donde R es el símbolo que empleamos para representar la equipolencia, nos clasifica efectivamente el conjunto de vectores K^2, en subconjuntos o clases tales que todos los infinitos vectores que forman una cualquiera de esas clases son equipolentes entre sí.

Una cualquiera $C(V)$, de las clases del conjunto cociente $\dfrac{K^2}{R}$ se llama *vector libre*. El conjunto K^2 contendrá, pues, tantos vectores libres como clases contiene el conjunto cociente.

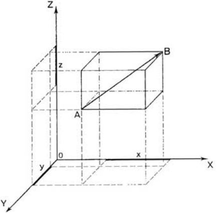
Conviene insistir en que un vector libre no es un vector, sino un conjunto de infinitos vectores, todos equipolentes entre sí, y que, por tanto, cada vector de un vector libre es solamente un representante de éste. Un vector libre tiene, pues, infinitos representantes, a cada uno de los cuales se le llama simplemente vector del vector libre.

II. Si $n=3$, se conviene en representar las coordenadas de V con x, y, z, es decir:

$$V=(x, y, z).$$

Si suponemos ahora trazado en el espacio tridimensional un sistema cartesiano rectangular, adoptaremos como representación gráfica del vector $V=(x, y, z)$ a todo segmento orientado AB cuyas proyecciones ortogonales sobre los ejes X, Y, Z sean x, y, z, respectivamente.

La palabra «vector» designará indistintamente la terna ordenada de números (x, y, z), o bien cada segmento orientado $\boldsymbol{AB}$ cuyas proyecciones ortogonales sobre los ejes X, Y, Z sean x, y, z, respectivamente.



Cada vector $\boldsymbol{V}=(x, y, z)$ tiene como representación gráfica el vector $\boldsymbol{AB}$, y los infinitos vectores que son equipolentes a él.

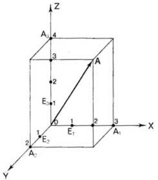
Isomorfismo en K^3. El conjunto K^3 de todos los vectores (ternas numéricas) es isomorfo con respecto al conjunto K^3 de todos los vectores del espacio tridimensional.

Vectores libres. Análoga definición a la dada en K^3.

Ejemplos 1:

Si $\boldsymbol{OA}$ es el vector, del vector libre $\boldsymbol{V}=(3, 2, 4)$, cuyo origen coincide con el origen de coordenadas, las coordenadas del extremo $\boldsymbol{A}$ del vector serán 3, 2 y 4.

Obsérvese que $\boldsymbol{V}_1=(3, 0, 0)$ es el vector $\boldsymbol{OA}_1$; $\boldsymbol{V}_2=(0, 2, 0)$ es el vector $\boldsymbol{OA}_2$; $\boldsymbol{V}_3=(0, 0, 4)$ es el vector $\boldsymbol{OA}_3$; $\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0)$ es el vector $\boldsymbol{OE}_1$; $\boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0)$ es el vector $\boldsymbol{OE}_2$ y $\boldsymbol{e}_3=(0, 0, 1)$ es el vector $\boldsymbol{OE}_3$.



En el espacio tridimensional $\boldsymbol{K}^3$, a los vectores $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$ se les llama *vectores unidad.*

El vector nulo es el $\boldsymbol{0}=(0, 0, 0)$; por tanto, el vector nulo tiene como representación gráfica cualquier punto del espacio y, en particular, el origen de coordenadas.

En general, los *vectores unidad* de un espacio vectorial n-dimensional $\boldsymbol{K}^n$, sobre el cuerpo $\boldsymbol{K}$ de los números reales ($\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$), son:

$$\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0, \overset{n}{\overbrace{\ldots}}, 0), \qquad \boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0, \overset{n}{\overbrace{\ldots}}, 0)$$

$$\text{y} \qquad \boldsymbol{e}_n=(0, 0, \overset{n}{\overbrace{\ldots}}, 0, 1).$$

El vector nulo es:

$$\boldsymbol{0}=(0, 0, \overset{n}{\overbrace{\ldots}}, 0).$$

Ejemplos 2:

Dados los vectores

$$\boldsymbol{V}=(3,\ -2,5);\quad \boldsymbol{V}'=(-5,2,3)\quad \text{y}\quad \boldsymbol{V}''=(4,3,\ -2),$$

se pide:

1.° $\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{V}''$.
2.° $-3\cdot\boldsymbol{V}$.
3.° $2\cdot\boldsymbol{V}-4\cdot\boldsymbol{V}'+5\cdot\boldsymbol{V}''$.
4.° El opuesto de $\boldsymbol{V}$.
5.° El vector que sumado con $\boldsymbol{V}'$ da el vector nulo.

Resolución:

1.° $\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{V}''=(3,\ -2,\ 5)-(-5,\ 2,\ 3)+(4,\ 3,\ -2)=$
$=(3+5+4,\ -2-2+3,\ 5-3-2)=(12,\ -1,\ 0)$.

2.° $-3\cdot\boldsymbol{V}=-3\cdot(3,\ -2,5)=(-9,6,\ -15)$.

3.° $2\cdot\boldsymbol{V}-4\cdot\boldsymbol{V}'+5\cdot\boldsymbol{V}''=2\cdot(3,\ -2,\ 5)-4\cdot(-5,\ 2,\ 3)+$
$+5\cdot(4,\ 3,\ -2)=(6,\ -4,\ 10)-(-20,\ 8,\ 12)+$
$+(20,15,\ -10)=(6+20+20,\ -4-8+15,10-12-10)=$
$=(46,3,\ -12)$.

4.° El opuesto de $(3,\ -2,\ 5)$ es $(-3,\ 2,\ -5)$.

5.° El vector pedido (x,y,z) deberá verificar la relación:

$$(x,y,z)+(-5,2,3)=(0,0,0);$$

o sea:

$$(x-5,y+2,z+3)=(0,0,0)$$

y como la igualdad de estos últimos vectores implica:

$$x-5=0,\quad y+2=0,\quad z+3=0,$$

tendrá que ser:

$$x=5,\quad y=-2,\quad z=-3.$$

El vector pedido es, pues, $(5,\ -2,\ -3)$; o sea, el opuesto de $\boldsymbol{V}'$.

56. Espacio vectorial de matrices unicolumnas

Siendo indiferente escribir las coordenadas de un vector de $\boldsymbol{K}^n$ horizontal o verticalmente, es decir, en una de las formas:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

cuando interese distinguir una de la otra forma de escribir los elementos del vector, los designaremos como *vector fila* o *vector columna,* respectivamente.

Al vector columna, por razones que veremos en el próximo capítulo, se le llama preferiblemente *matriz unicolumna,* y al espacio vectorial correspondiente *espacio vectorial de matrices unicolumnas.*

Este espacio, cuyos elementos son matrices unicolumnas, se suele representar con la notación $\boldsymbol{M}^n$.

Si $\boldsymbol{K}$ es un cuerpo, por ejemplo el cuerpo $\boldsymbol{R}$ de los números reales, el espacio vectorial $\boldsymbol{M}^n$ sobre el cuerpo $\boldsymbol{K}$ queda estructurado, al igual que $\boldsymbol{K}^n$, en la forma siguiente:

1.
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{pmatrix}$$

si, y sólo si,

$$x_i = x'_i \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

2. La suma viene definida por la igualdad:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n + x'_n \end{pmatrix}$$

3. La multiplicación de un escalar λ por una matriz viene dada por la igualdad:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

57. Producto de espacios vectoriales

Vamos a tratar ahora de construir nuevos espacios vectoriales a partir de espacios vectoriales dados.

I. Si

$$\boldsymbol{E}_1 \equiv \{\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_1'', \dots\} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{E}_2 \equiv \{\boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_2', \boldsymbol{V}_2'', \dots\}$$

son dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\boldsymbol{K}$, podemos formar un nuevo espacio vectorial $\mathcal{E}$ sobre el cuerpo $\boldsymbol{K}$, en la forma siguiente:

Sea $\mathcal{E} = \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2$ el producto cartesiano formado por todos los pares posibles $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$, con $\boldsymbol{V}_1 \in \boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{V}_2 \in \boldsymbol{E}_2$, y $\boldsymbol{K}$ el cuerpo común dado.

1. Diremos que dos pares de $\mathcal{E}$, $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$ y $(\boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_2')$, son iguales si, y sólo si:

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_1' \quad \text{y} \quad \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}_2'$$

2. La suma de $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$ y $(\boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_2')$ viene definida por la igualdad siguiente:

$$(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2) + (\boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_2') = (\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_2 + \boldsymbol{V}_2')$$

Es inmediato comprobar que, de esta forma, al conjunto $\mathcal{E}$ se le ha conferido estructura de grupo aditivo abeliano.

3. Finalmente, la ley externa la definimos mediante la igualdad

$$\lambda \cdot (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2) = (\lambda \cdot \boldsymbol{V}_1, \lambda \cdot \boldsymbol{V}_2)$$

También se demuestra fácilmente que la ley externa así definida verifica los axiomas correspondientes.

El conjunto $\mathcal{E}=\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_2$ es, pues, un espacio vectorial sobre el cuerpo $\boldsymbol{K}$.

II. Si $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, ... y $\boldsymbol{E}_m$ es un número finito de espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\boldsymbol{K}$, se puede formar un nuevo espacio vectorial $\mathcal{E}$ sobre el cuerpo $\boldsymbol{K}$ en la forma siguiente:

Sea $\mathcal{E}=\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_2\times\ldots\times\boldsymbol{E}_m$ el producto cartesiano formado por las sucesiones $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots, \boldsymbol{V}_m)$, obtenidas tomando de todas las formas posibles un vector de cada uno de los m espacios vectoriales, o sea: $\mathcal{E}$ está formado por todas las sucesiones posibles

$$(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots, \boldsymbol{V}_m)$$

donde

$$\boldsymbol{V}_1\subset\boldsymbol{E}_1,\ \boldsymbol{V}_2\subset\boldsymbol{E}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{V}_m\subset\boldsymbol{E}_m$$

1. $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots, \boldsymbol{V}_m)=(\boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_2', \ldots, \boldsymbol{V}_m')$ si, y sólo si:

$$\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{V}_i' \quad \text{para} \quad i=1, 2, \ldots, m$$

2. La suma viene dada por:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots, \boldsymbol{V}_m)+(\boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_2', \ldots, \boldsymbol{V}_m')=&\\ =(\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_2', \ldots, \boldsymbol{V}_m+\boldsymbol{V}_m').&\end{aligned}$$

3. El producto de un escalar λ por un vector de $\mathcal{E}$ viene dado por:

$$\lambda\cdot(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots, \boldsymbol{V}_m)=(\lambda\cdot\boldsymbol{V}_1, \lambda\cdot\boldsymbol{V}_2, \ldots, \lambda\cdot\boldsymbol{V}_m)$$

El conjunto $\mathcal{E}=\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_2\times\ldots\times\boldsymbol{E}_m$ es, pues, un espacio vectorial sobre el cuerpo $\boldsymbol{K}$.

Si, en particular, $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2=\ldots=\boldsymbol{E}_m=\boldsymbol{K}$, donde $\boldsymbol{K}$ es, por ejemplo, el cuerpo $\boldsymbol{R}$ de los números reales, los vectores del espacio vectorial producto serán sucesiones ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de números reales y, por tanto, dicho espacio vectorial no será otro que el definido en 55, esto es, $\boldsymbol{K}^m$.

Subespacio vectorial. Si $\boldsymbol{E}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{E}'$ es un subconjunto de $\boldsymbol{E}$, que a su vez es un espacio vectorial sobre $\boldsymbol{K}$, diremos que $\boldsymbol{E}'$ es un *subespacio vectorial* de $\boldsymbol{E}$, o *variedad lineal* de $\boldsymbol{E}$.

Ejemplo:

El conjunto de vectores de $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{K}^3$ ($\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$), que tienen la tercera coordenada nula, o sea, el conjunto de vectores de $\boldsymbol{K}^3$ de la forma $(x, y, 0)$ es un subespacio vectorial o variedad lineal de $\boldsymbol{K}^3$; concretamente, el espacio vectorial de los vectores de $\boldsymbol{K}^3$ que son paralelos al plano XY sobre el cuerpo $\boldsymbol{K}$ de los números reales.

Subespacio engendrado por elementos de E. Si $\boldsymbol{E}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\boldsymbol{K}$, que es, por ejemplo, el conjunto $\boldsymbol{R}$ de los números reales; $\{\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots, \boldsymbol{V}_p\}$ un sistema dado de vectores de $\boldsymbol{E}$ y $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ un sistema de números arbitrarios de $\boldsymbol{K}$, vamos a demostrar que el conjunto de vectores de $\boldsymbol{E}$ de la forma:

$$(1) \qquad \boldsymbol{V}=\lambda_1\cdot\boldsymbol{V}_1+\lambda_2\cdot\boldsymbol{V}_2+\ldots+\lambda_p\cdot\boldsymbol{V}_p$$

puede estructurarse como un subespacio vectorial de $\boldsymbol{E}$.

En efecto:

1. Diremos que dos vectores de $\boldsymbol{E}'$

$$\boldsymbol{V}=\lambda_1\cdot\boldsymbol{V}_1+\lambda_2\cdot\boldsymbol{V}_2+\ldots+\lambda_p\cdot\boldsymbol{V}_p$$

y

$$\boldsymbol{V}'=\lambda_1'\cdot\boldsymbol{V}_1+\lambda_2'\cdot\boldsymbol{V}_2+\ldots+\lambda_p'\cdot\boldsymbol{V}_p$$

son iguales si, y sólo si,

$$\lambda_i=\lambda_i' \qquad \text{para} \qquad i=1, 2, \ldots, p$$

2. Suma de dos vectores $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{V}'$ es el vector:

$$\boldsymbol{W}=(\lambda_1+\lambda_1')\cdot\boldsymbol{V}_1+(\lambda_2+\lambda_2')\cdot\boldsymbol{V}_2+\ldots+(\lambda_p+\lambda_p')\cdot\boldsymbol{V}_p$$

Es inmediato que la operación suma así definida es asociativa, conmutativa, admite como elemento neutro el vector

$$\mathbf{0}=0\cdot\boldsymbol{V}_1+0\cdot\boldsymbol{V}_2+\ldots+0\cdot\boldsymbol{V}_p$$

como opuesto de cada vector (1), el

$$-\boldsymbol{V}=-\lambda_1\cdot\boldsymbol{V}_1-\lambda_2\cdot\boldsymbol{V}_2-\ldots-\lambda_p\cdot\boldsymbol{V}_p$$

3. La ley externa la definiremos así: Producto del escalar λ por el vector (1), es el vector:

$$\lambda\cdot\boldsymbol{V}=(\lambda\cdot\lambda_1)\cdot\boldsymbol{V}_1+(\lambda\cdot\lambda_2)\cdot\boldsymbol{V}_2+\ldots+(\lambda\cdot\lambda_p)\cdot\boldsymbol{V}_p$$

Fácil es probar que la ley así definida verifica los axiomas de la ley externa. Como las tres definiciones anteriores confieren estructura de espacio vectorial a $\boldsymbol{E}'$ y como, además, $\boldsymbol{E}'\subseteq\boldsymbol{E}$ queda definitivamente demostrado que $\boldsymbol{E}'$ es una variedad lineal de $\boldsymbol{E}$.

Vector combinación lineal de otros. Si $\boldsymbol{E}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\boldsymbol{K}$ y $\{\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots, \boldsymbol{V}_p\}$ es un *sistema* de vectores de $\boldsymbol{E}$, diremos que el vector

$$\boldsymbol{V}=\lambda_1\cdot\boldsymbol{V}_1+\lambda_2\cdot\boldsymbol{V}_2+\ldots+\lambda_p\cdot\boldsymbol{V}_p,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ es un sistema cualquiera de valores de $\boldsymbol{K}$, es una *combinación lineal* del sistema de vectores dado.

58. Dependencia e independencia lineal

Si $\boldsymbol{K}^n$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$), diremos que los vectores $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots, \boldsymbol{V}_p$ son *linealmente dependientes* si existe un sistema de números de $\boldsymbol{K}$, no todos nulos, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, tales que:

$$\lambda_1\cdot\boldsymbol{V}_1+\lambda_2\cdot\boldsymbol{V}_2+\ldots+\lambda_p\cdot\boldsymbol{V}_p=\mathbf{0}$$

En cambio, si no existe ningún sistema de p números de $\boldsymbol{K}$, no todos nulos, que verifiquen la relación anterior, se dice que los vectores $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots, \boldsymbol{V}_p$ son *linealmente independientes.*

Ejercicios:

a) Probar que los vectores $(2,1,4)$, $(3,5,-12)$ y $(-19,-20,16)$ son linealmente dependientes.

Resolución:

El problema se reduce a demostrar que existen 3 números, no todos nulos, λ_1, λ_2, λ_3, que verifican la relación:

$$\lambda_1\cdot(2,1,4)+\lambda_2\cdot(3,5,-12)+\lambda_3\cdot(-19,-20,16)=(0,0,0)$$

o sea:

$$(2\lambda_1,\lambda_1,4\lambda_1)+(3\lambda_2,5\lambda_2,-12\lambda_2)+(-19\lambda_3,-20\lambda_3,16\lambda_3)=$$
$$=(0,0,0)$$

de donde:

$$(2\lambda_1+3\lambda_2-19\lambda_3,\lambda_1+5\lambda_2-20\lambda_3,4\lambda_1-12\lambda_2+16\lambda_3)=$$
$$=(0,0,0)$$

finalmente, la igualdad de los dos vectores implica:

$$\begin{aligned}2\lambda_1+3\lambda_2-19\lambda_3&=0\\ \lambda_1+5\lambda_2-20\lambda_3&=0\\ 4\lambda_1-12\lambda_2+16\lambda_3&=0\end{aligned}$$

Resuelto el sistema, tenemos: $\lambda_1=5\lambda$, $\lambda_2=3\lambda$ y $\lambda_3=\lambda$, donde λ es un parámetro real cualquiera. En particular, para $\lambda=1$ tenemos el sistema de números distintos de cero $\lambda_1=5$, $\lambda_2=3$ y $\lambda_3=1$, que prueba definitivamente que los vectores dados son linealmente dependientes.

b) Probar que los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ son linealmente independientes.

Resolución:

En efecto, la igualdad

$$\lambda_1\cdot(1,0,0)+\lambda_2\cdot(0,1,0)+\lambda_3\cdot(0,0,1)=(0,0,0)$$

implica

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

En general, en un espacio vectorial n-dimensional K^n, los vectores unidad

$$e_1=(1, 0, \overset{n}{\overbrace{\ldots}}, 0);\quad e_2=(0, 1, 0, \overset{n}{\overbrace{\ldots}}, 0);\quad \ldots;\quad e_n=(0, 0, \overset{n}{\overbrace{\ldots}}, 0, 1)$$

son linealmente independientes.

59. Bases de un espacio vectorial

Sea K^n un espacio vectorial n-dimensional sobre un cuerpo K ($K=R$), y supongamos que $V_1=(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$; $V_2=(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$; $\ldots$; $V_n=(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n)$ son n vectores linealmente independientes del espacio vectorial dado.

En las anteriores hipótesis se demuestra (nosotros lo admitimos) que: todo el espacio vectorial K^n puede ser engendrado por el sistema de vectores linealmente independients V_1, V_2, $\ldots$, V_n, lo cual equivale a decir que todo vector V de K^n puede escribirse como combinación lineal del repetido sistema de vectores.

Se demuestra también (aquí lo admitiremos), que la forma de expresar el vector V como combinación lineal del sistema de vectores dados es única.

Se llama *base* del espacio vectorial K^n a todo sistema de vectores linealmente independientes que nos permita engendrar K^n.

Se podría probar que todas las bases de un mismo espacio vectorial constan de igual número de vectores y que este número común es igual al de dimensiones de dicho espacio.

Como los n vectores unidad

$$e_1=(1, 0, \overset{n}{\overbrace{\ldots}}, 0),\quad e_2=(0, 1, 0, \overset{n}{\overbrace{\ldots}}, 0),\quad \ldots,\quad e_n=(0, 0, \overset{n}{\overbrace{\ldots}}, 0, 1)$$

son linealmente independientes, este sistema de vectores será una base de K^n, se llama *base natural* o *canónica*.

Todo vector $V=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se puede poner fácilmente como combinación lineal de los vectores unidad, como lo pone de manifiesto la igualdad inmediata:

$$V=x_1\cdot e_1+x_2\cdot e_2+\ldots+x_n\cdot e_n$$

En el espacio geométrico ordinario de tres dimensiones, todo vector $\boldsymbol{V}=(x, y, z)$ viene dado por

$$\boldsymbol{V}=x\cdot\boldsymbol{e}_1+y\cdot\boldsymbol{e}_2+z\cdot\boldsymbol{e}_3$$

Ejercicios:

a) Expresar el vector $\boldsymbol{V}=(9, 4, 18)$ como combinación lineal de los vectores linealmente independientes:

$$\boldsymbol{V}_1=(4, 2, 5);\quad \boldsymbol{V}_2=(-3, 5, 6)\quad \text{y}\quad \boldsymbol{V}_3=(2, -3, -2).$$

Resolución:

$$\lambda_1\cdot(4, 2, 5)+\lambda_2\cdot(-3, 5, 6)+\lambda_3\cdot(2, -3, -2)=(9, 4, 18);$$
$$(4\lambda_1-3\lambda_2+2\lambda_3,\ 2\lambda_1+5\lambda_2-3\lambda_3,\ 5\lambda_1+6\lambda_2-2\lambda_3)=(9, 4, 18);$$
$$\begin{cases} 4\lambda_1-3\lambda_2+2\lambda_3=9 \\ 2\lambda_1+5\lambda_2-3\lambda_3=4 \\ 5\lambda_1+6\lambda_2-2\lambda_3=18 \end{cases}$$

Resuelto el sistema, tenemos, para los parámetros:

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=5;$$

luego:

$$\boldsymbol{V}=2\cdot\boldsymbol{V}_1+{}_3\cdot\boldsymbol{V}_2+5\cdot\boldsymbol{V}_3$$

b) Expresar el vector $\boldsymbol{V}=(3, 2, -5)$ como combinación lineal de los vectores unidad:

$$\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0);\quad \boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0)\quad \text{y}\quad \boldsymbol{e}_3=(0, 0, 1)$$

Resolución:

Es inmediato que:

$$\boldsymbol{V}=3\cdot\boldsymbol{e}_1+2\cdot\boldsymbol{e}_2-5\cdot\boldsymbol{e}_3.$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Demostrar que la ley de composición interna $*$, definida por la igualdad

$$x * y = x + y - 8$$

confiere estructura de grupo abeliano al conjunto $\mathbf{Z}$ de los número enteros.

Solución:

Clausura:

$$x * y = x + y - 8 \in \mathbf{Z}$$

Asociativa:

$$\begin{aligned}(x * y) * z = (x + y - 8) * z = x + y - 8 + z - 8 = \\ = x + (y + z - 8) - 8 = x * (y * z)\end{aligned}$$

Elemento neutro:

$$\begin{aligned}x * e_1 = x + e_1 - 8 = x \implies e_1 = 8 \\ e_2 * x = e_2 + x - 8 = x \implies e_2 = 8\end{aligned}$$

Luego:

$$e_1 = e_2 = 8 \implies e = 8.$$

Elementos simétricos:

$$\begin{aligned}x * x_1^{-1} = x + x_1^{-1} - 8 = 8 \implies x_1^{-1} = 16 - x \\ x_2^{-1} * x = x_2^{-1} + x - 8 = 8 \implies x_2^{-1} = 16 - x\end{aligned}$$

Luego:

$$x_1^{-1} = x_2^{-1} = 16 - x \implies x^{-1} = 16 - x$$

Conmutativa:

$$x * y = x + y - 8 = y + x - 8 = y * x$$

La ley $*$ ha conferido, pues, estructura de grupo abeliano al conjunto $\boldsymbol{Z}$ de los números enteros.

2. ¿Las leyes de composición interna definidas mediante las igualdades:

$$x * y = x + y - 8 \qquad x \perp y = x + y - xy$$

confieren estructura de anillo al conjunto $\boldsymbol{Z}$ de los números enteros?

Solución:

En virtud del ejercicio anterior, la ley $*$ confiere estructura de grupo abeliano al conjunto $\boldsymbol{Z}$.

Por otra parte, la ley $\perp$ es *asociativa*, pues, en efecto:

$$(x \perp y) \perp z = (x + y - xy) \perp z = x + y - xy + z - (x + y - x \cdot y) \cdot z =$$
$$= x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) = x \perp (y \perp z).$$

Veamos ahora si la ley $\perp$ es distributiva (por la izquierda y por la derecha) con respecto a la ley $*$:

$$x \perp (y * z) = x + (y + z - 8) - x(y + z - 8) =$$
$$= x + y + z - 8 - xy - xz + 8x =$$
$$= 9x + y + z - xy - xz - 8$$

En cambio:

$$(x \perp y) * (x \perp z) = (x + y - xy) + (x + z - xz) - 8 =$$
$$= 2x + y + z - xy - xz - 8$$

Como los resultados son distintos, la ley $\perp$ no es distributiva por la izquierda con respecto a la ley $*$, y, por tanto, no se verifica la propiedad distributiva; luego las leyes $*$ y $\perp$ no confieren estructura de anillo al conjunto $\boldsymbol{Z}$.

3. Se consideran las aplicaciones de $\boldsymbol{R}$ en $\boldsymbol{R}$ de la forma

(1) $\qquad f(x) = ax + b \quad$ siendo $\quad a \neq 0$

Demostrar que la ley de composición $*$, definida mediante la igualdad:

$$f(x) * \varphi(x) = [f \circ \varphi](x)$$

confiere estructura de grupo al conjunto

$$G \equiv \{f(x), \varphi(x), \dots\}$$

de las aplicaciones de la forma (1).

Solución:

Clausura: Si $f(x)=ax+b$ y $\varphi(x)=mx+n$, se tiene:

$$\begin{aligned} f(x) * \varphi(x) &= [f \circ \varphi](x) = f(mx+n) = a(mx+n)+b = \\ &= amx + (an+b) \in G. \end{aligned}$$

Asociativa: También se verifica (33.1).

Elemento neutro: Si $I_1(x)=mx+n$ es la aplicación neutra por la derecha, deberá verificarse:

$$\begin{aligned} f(x) * I_1(x) = f(x) &\Longrightarrow f[I_1(x)] = f(x) \Longrightarrow f(mx+n) = \\ &= f(x) \Longrightarrow a(mx+n)+b = \\ &= ax+b \Longrightarrow amx+(an+b) = \\ &= ax+b \Longrightarrow m=1 \text{ y } n=0 \Longrightarrow I_1(x)=x. \end{aligned}$$

Análogamente, si $I_2(x)=mx+b$ es la aplicación neutra por la izquierda, deberá verificarse:

$$\begin{aligned} I_2(x) * f(x) = f(x) &\Longrightarrow I_2[f(x)] = f(x) \Longrightarrow I_2(ax+b) = \\ &= f(x) \Longrightarrow m(ax+b)+n = \\ &= ax+b \Longrightarrow max+(mb+n) = \\ &= ax+b \Longrightarrow m=1 \text{ y } n=0 \Longrightarrow I_1(x)=x. \end{aligned}$$

Luego:

$$I_1(x) = I_2(x) = x \Longrightarrow I(x) = x.$$

*El elemento neutro de **G** es la aplicación idéntica* (31).

Elementos simétricos: Si $f_1^{-1}(x)=mx+n$ es la aplicación simétrica por la derecha de $f(x)$, deberá verificarse:

$$\begin{aligned} f(x) * f_1^{-1}(x) = x &\Longrightarrow f[f_1^{-1}(x)] = x \Longrightarrow f(mx+n) = \\ &= x \Longrightarrow a(mx+n)+b = x \Longrightarrow m = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

y

$$n = -\frac{b}{a} \Longrightarrow f_1^{-1}(x) = \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}$$

Análogamente, si $f_2^{-1}(x)=mx+n$ es la aplicación simétrica por la izquierda, deberá verificarse:

$$f_2^{-1}(x) * f(x)=x \Longrightarrow f_2^{-1}[f(x)]=x \Longrightarrow f_2^{-1}(ax+b)=$$
$$=x \Longrightarrow m(ax+b)+n=x \Longrightarrow m=\frac{1}{a}$$

y

$$n=-\frac{b}{a} \Longrightarrow f_2^{-1}(x)=\frac{1}{a}\cdot x-\frac{b}{a}.$$

Luego:

$$f_1^{-1}(x)=f_2^{-1}(x)=\frac{1}{a}\cdot x-\frac{b}{a} \Longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$$

Como

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{a}\cdot x-\frac{b}{a}$$

es la aplicación inversa (32) de $f(x)$, podemos concluir que:

El elemento simétrico de una aplicación cualquiera de $\boldsymbol{G}$ *es su inversa.*

La ley $*$ ha conferido, pues, estructura de grupo al conjunto $\boldsymbol{G}$ de todas las aplicaciones de la forma (1).

4. Demostrar que un grupo en el que dos elementos cualesquiera x e y verifican la condición:

$$(x * y)^2=x^2 * y^2$$

tiene que ser abeliano.

Solución:

$$\begin{aligned}
(x * y)^2=x^2 * y^2 &\Longrightarrow x*y*x*y=x*x*y*y \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow x^{-1}*x*y*x*y=x^{-1}*x*x*y*y \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow (x^{-1}*x)*y*x*y=(x^{-1}*x)*x*y*y \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow e*y*x*y=e*x*y*y \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow y*x*y=x*y*y \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow y*x*y*y^{-1}=x*y*y*y^{-1} \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow y*x*e=x*y*e \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow y*x=x*y.
\end{aligned}$$

Igualdad que prueba que el grupo dado es abeliano.

5. Demostrar que si $x * x = x$ en un grupo, será $x = e$.

Solución:

Por hipótesis, $x * x = x$, y como $x * e = x$, se tendrá:

$$x * x = x * e \Longrightarrow x^{-1} * x * x = x^{-1} * x * e \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow e * x = e * e \Longrightarrow x = e.$$

6. El conjunto A de los números enteros pares se dota de dos leyes de composición; una de ellas, $+$, es la adición ordinaria, y la otra, $*$, hace corresponder a cada par x e y de A, el número $\frac{x \cdot y}{2}$.

Demostrar que al conjunto A se le ha conferido estructura de anillo.

Solución:

Ley aditiva:

1.ª	$x + y \in A$	Clausura.
2.ª	$(x+y)+z = x+(y+z)$	Asociativa.
3.ª	$x + 0 = 0 + x = x$	Existencia de neutro.
4.ª	$x + (-x) = (-x) + x = 0$	Existencia de opuesto.
5.ª	$x + y = y + x$	Conmutativa.

La ley $+$ confiere, pues, estructura de grupo abeliano al conjunto A.

Ley multiplicativa:

1.ª $\quad x * y = \dfrac{x \cdot y}{2} \in A$ Clausura.

2.ª $\quad (x * y) * z = \dfrac{\dfrac{x \cdot y}{2} \cdot z}{2} = \dfrac{x \cdot \dfrac{y \cdot z}{2}}{2} = x * (y * z)$ Asociativa.

3.ª $\quad x * (y + z) = \dfrac{x \cdot (y+z)}{2} = \dfrac{x \cdot y}{2} + \dfrac{x \cdot z}{2} = (x * y) + (x * z)$

Distributiva.

4.ª $\quad (y + z) * x = \dfrac{(y+z) \cdot x}{2} = \dfrac{y \cdot x}{2} + \dfrac{z \cdot x}{2} = (y * x) + (z * x)$

Las dos leyes $+$ y $*$ confieren, pues, al conjunto A, estructura de anillo. Además, como

$$x*2=\frac{x\cdot 2}{2}=\frac{2\cdot x}{2}=2*x=x \quad \text{Existencia de unidad.}$$

$$x*y=\frac{x\cdot y}{2}=\frac{y\cdot x}{2}=y*x \quad \text{Conmutativa.}$$

El anillo es unitario y conmutativo. Ahora bien, como el producto de dos elementos distintos de cero es distinto de cero, el anillo es de integridad.

Finalmente, al tener la multiplicación elemento unidad (aunque parezca paradójico, el 1 de la multiplicación es el número 2), el conjunto A es un *dominio de integridad.*

7. El conjunto A de números de la forma $x=a+b\sqrt{3}$, donde a y b son números enteros, se dota de las leyes ordinarias de suma y producto. Demostrar que dichas leyes confieren estructura de anillo al conjunto A.

Solución:

Ley aditiva:

1.° $x+y=a+b\sqrt{3}+m+n\sqrt{3}=(a+m)+(b+n)\sqrt{3}\in A.$ Clausura.

2.° $(x+y)+z=(a+b\sqrt{3}+m+n\sqrt{3})+p+q\sqrt{3}=$
$=a+b\sqrt{3}+(m+n\sqrt{3}+p+q\sqrt{3})=x+(y+z)$ Asociativa.

3.° $a+b\sqrt{3}+m+n\sqrt{3}=m+n\sqrt{3}+a+b\sqrt{3}=$
$=a+b\sqrt{3} \implies m=0,\ n=0.$

El elemento neutro es: $0+0\sqrt{3}.$

4.° $a+b\sqrt{3}+m+n\sqrt{3}=0+0\sqrt{3}\implies m=-a,\ n=-b.$

El simétrico de cada $x=a+b\sqrt{3}$ es: $-a-b\sqrt{3}.$

Ley multiplicativa:

1.° $x\cdot y=(a+b\sqrt{3})(m+n\sqrt{3})=(am+3bn)+(an+bm)\sqrt{3}\in A$ Clausura.

2.° $(xy)z=[(a+b\sqrt{3})(m+n\sqrt{3})](p+q\sqrt{3})=$
$=(a+b\sqrt{3})[(m+n\sqrt{3})(p+q\sqrt{3})]=x(yz).$ Asociativa.

3.° $x(y+z)=(a+b\sqrt{3})[(m+n\sqrt{3})+(p+q\sqrt{3})]=$
$=(a+b\sqrt{3})(m+n\sqrt{3})+(a+b\sqrt{3})(p+q\sqrt{3})=$
$=xy+xz.$ Distributiva por la izquierda.

4.° $(y+z)x=[(m+n\sqrt{3})+(p+q\sqrt{3})](a+b\sqrt{3})=$
$=(m+n\sqrt{3})(a+b\sqrt{3})+(p+q\sqrt{3})(a+b\sqrt{3})=$
$=yx+zx.$ Distributiva por la derecha.

Las dos leyes $+$ y $\cdot$ confieren, pues, estructura de anillo al conjunto A. Además:

$$x\cdot e=x\Longrightarrow(a+b\sqrt{3})\,(m+n\sqrt{3})=a+b\sqrt{3}\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow m+n\sqrt{3}=1\Longrightarrow m=1,\ n=0.$$

El elemento unidad es: $1+0\cdot\sqrt{3}.$

$$x\cdot y=(a+b\sqrt{3})(m+n\sqrt{3})=(m+n\sqrt{3})(a+b\sqrt{3})=y\cdot x$$

Conmutativa.

El anillo es unitario y conmutativo. Veamos si en este anillo existen divisores de cero; es decir, si existen elementos $a+b\sqrt{3}$, $m+n\sqrt{3}$ no nulos, cuyo producto sea cero, o sea:

(1) $$(am+3bn)\cdot(an+bm)\sqrt{3}=0+0\sqrt{3}.$$

Partamos de la hipótesis $a+b\sqrt{3}\neq 0$, $m+n\sqrt{3}\neq 0$; si $a+b\sqrt{3}\neq 0\Longrightarrow a$ o b, o ambos, serán distintos de cero; sea, por ejemplo, $a\neq 0$.

La ecuación (1) implica:

$$\begin{cases} am+3bn=0\\ bm+\ an=0\end{cases}.$$

Ahora bien, si este sistema tiene soluciones distintas de la $m=n=0$, tendrá que ser:

$$\begin{vmatrix} a & 3b\\ b & a\end{vmatrix}=0\Longrightarrow a^2-3b^2=0\Longrightarrow a=\pm\,b\sqrt{3}.$$

Conclusión absurda, pues a debe ser un número entero.

Al no tener A divisores de cero, es un anillo de integridad. Finalmente, al tener la multiplicación elemento unidad, el conjunto A ha quedado estructurado como *dominio de integridad.*

Probaremos ahora que A no tiene estructura de cuerpo. Bastará con probar que un elemento cualquiera $a+b\sqrt{3}$ no tiene, en general, inverso.

En efecto, si $a+b\sqrt{3}$ tuviera inverso $m+n\sqrt{3}$, se tendría:

$$(a+b\sqrt{3})(m+n\sqrt{3})=1+0\cdot\sqrt{3}\Longrightarrow\begin{cases} am+3bn=1 \\ bm+\ \ an=0\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m=\frac{a}{a^2-3b^2},\qquad n=\frac{-b}{a^2-3b^2};$$

pero como a y b son enteros cualesquiera, m y n, en general, no serán enteros.

8. Sea $\boldsymbol{X}$ el conjunto de todas las raíces irracionales de la ecuación de coeficientes racionales $x^2=px+q$, para todos los valores posibles de p y q. Demuéstrese que si al conjunto A, de los números reales dados por $ax+b$, donde $x\in\boldsymbol{X}$ y a y b son racionales cualesquiera, se le dota con las leyes ordinarias de suma y producto, dicho conjunto adquiere estructura de cuerpo conmutativo.

Solución:

Ley aditiva:

1.° $(a_1x+b_1)+(a_2x+b_2)=(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)\in A.$ Clausura.

2.° $$\begin{aligned}&[(a_1x+b_1)+(a_2x+b_2)]+(a_3x+b_3)=\\&=[(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)]+(a_3x+b_3)=\\&=(a_1+a_2+a_3)x+(b_1+b_2+b_3)=\\&=a_1x+(a_2+a_3)x+b_1+(b_2+b_3)=\\&=(a_1x+b_1)+[(a_2+a_3)x+(b_2+b_3)]=\\&=(a_1x+b_1)+[(a_2x+b_2)+(a_3x+b_3)].\end{aligned}$$ Asociativa.

3.° $$\begin{aligned}(ax+b)+(mx+n)&=(a+m)x+(b+n)=(m+a)x+(n+b)=\\&=(mx+n)+(ax+b)\end{aligned}$$ Conmutativa.

4.° $(ax+b)+(mx+n)=(ax+b)\Longrightarrow m=0,\ n=0.$
El elemento neutro es: $0x+0.$

5.° $(ax+b)+(mx+n)=0x+0\Longrightarrow m=-a,\ n=-b.$
El simétrico de cada $ax+b$ es: $-ax-b.$

Ley multiplicativa:

1.° $(ax+b)(mx+n)=amx^2+anx+bmx+bn=$
$=am(px+q)+(an+bm)x+bn=$
$=(amp+an+bm)x+(amq+bn)\in \boldsymbol{A}.$ Clausura.

2.° $[(ax+b)(mx+n)](rx+s)=(ax+b)[(mx+n)\cdot(rx+s)].$ Asociativa.

3.° $(ax+b)(mx+n)=(mx+n)\cdot(ax+b).$ Conmutativa.

4.° $(ax+b)(mx+n)=ax+b \Longrightarrow m=0,\ n=1.$

El elemento neutro es: $0x+1.$

5.° $(ax+b)(mx+n)=0x+1 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (amp+an+bm)x+(amq+bn)=0x+1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} amp+an+bm=0 \\ amq+bn=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (ap+b)m+an=0 \\ aqm+bn=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow m=\frac{\begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ap+b & a \\ aq & b \end{vmatrix}}\in \boldsymbol{Q},\quad n=\frac{\begin{vmatrix} ap+b & 0 \\ aq & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ap+b & a \\ aq & b \end{vmatrix}}\in \boldsymbol{Q}.$$

Luego cada $ax+b\neq 0$ tiene un simétrico $mx+n\in \boldsymbol{A}$, donde m y n vienen dados por las igualdades anteriores.

Ley distributiva:

$$(ax+b)[(mx+n)+(rx+s)]=(ax+b)(mx+n)+$$
$$+(ax+b)\cdot(rx+s)=[(mx+n)+(rx+s)]\cdot(ax+b)=$$
$$=(mx+n)(ax+b)+(rx+s)(ax+b).$$

9. Demostrar que el conjunto $\boldsymbol{C}$, de los números complejos, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\boldsymbol{R}$ de los números reales.

Solución:

Axiomas de la igualdad:

De la definición de igualdad dada en el conjunto de los números complejos, se sigue la certeza de las leyes: reflexiva, simétrica y transitiva.

Axiomas de grupo aditivo abeliano:

1.° $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \in \boldsymbol{C}$ Clausura.

2.° $[(a+bi)+(c+di)]+(e+fi)=[(a+c)+(b+d)i]+(e+fi)=$
$=(a+c+e)+(b+d+f)i=(a+bi)+[(c+e)+(d+f)i]=$
$=(a+bi)+[(c+di)+(e+fi)]$. Asociativa.

3.° $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i=$
$=(c+a)+(d+b)i=(c+di)+(a+bi)$. Conmutativa.

4.° $(a+bi)+(m+ni)=a+bi \Longrightarrow (a+m)+(b+n)i=$
$=a+bi \Longrightarrow m=0,\ n=0$.
El elemento neutro es: $0+0i$.

5.° $(a+bi)+(m+ni)=0+0i \Longrightarrow (a+m)+(b+n)i=$
$=0+0i \Longrightarrow m=-a,\ n=-b$.
El elemento simétrico de cada $a+bi$ es: $-a-bi$.

Axiomas de cuerpo de ***R****:*

Es inmediato probar que la adición y la multiplicación confieren estructura de cuerpo al conjunto $\boldsymbol{R}$ de los números reales.

Axiomas de la ley externa:

1.° $\alpha(a+bi)=\alpha a+(\alpha b)i \in \boldsymbol{C}$. Clausura.

2.° $\alpha[(a+bi)+(c+di)]=\alpha[(a+c)+(b+d)i]=$
$=(\alpha a+\alpha c)+(\alpha b+\alpha d)i=$
$=(\alpha a+\alpha bi)+(\alpha c+\alpha di)=$
$=\alpha(a+bi)+\alpha(c+di)$

$(\alpha+\beta)(a+bi)=$
$=(\alpha+\beta)a+(\alpha+\beta)bi=\alpha a+\beta a+(\alpha b+\beta b)i=$
$=(\alpha a+\alpha bi)+(\beta a+\beta bi)=\alpha(a+bi)+\beta(a+bi)$.
Distributividad.

3.° $\alpha[\beta(a+bi)]=\alpha(\beta a)+\alpha(\beta b)i=(\alpha\beta)a+(\alpha\beta)bi=$
$=\alpha\beta(a+bi)$. Asociatividad.

4.° $1\cdot(a+bi)=1\cdot a+1\cdot bi=a+bi$.
El elemento unidad de $\boldsymbol{R}$ es neutro.

10. Dados los vectores $\boldsymbol{a} \equiv (1, 2, 0, -3)$, $\boldsymbol{b} \equiv (4, 3, 4, -16)$ y $\boldsymbol{c} \equiv (-1, 3, -4, 7)$ hallar dos escalares λ y μ del cuerpo de definición que permitan expresar el vector $\boldsymbol{c}$ en función de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Solución:

Se trata de encontrar los valores λ y μ, que verifican la igualdad

$$\boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}$$

o sea:

$$(-1, 3, -4, 7) = \lambda(1, 2, 0, -3) + \mu(4, 3, 4, -16) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (-1, 3, -4, 7) = (\lambda + 4\mu, 2\lambda + 3\mu, 4\mu, -3\lambda - 16\mu) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda + 4\mu = -1 \\ 2\lambda + 3\mu = 3 \\ 4\mu = -4 \\ -3\lambda - 16\mu = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow \lambda = 3, \ \mu = -1$$

11. Averiguar si los cuatro vectores

$$\boldsymbol{V}_1 \equiv (0, 1, -2, 1), \quad \boldsymbol{V}_2 \equiv (-1, 7, 2, -4),$$
$$\boldsymbol{V}_3 \equiv (1, 3, 2, -1), \quad \boldsymbol{V}_4 \equiv (1, 0, 0, 1).$$

son o no linealmente independientes. En caso de no serlo, encuéntrese la relación de dependencia.

Solución:

El problema se reduce a resolver la ecuación vectorial (57):

$$\lambda_1(0, 1, -2, 1) + \lambda_2(-1, 7, 2, -4) + \lambda_3(1, 3, 2, -1) +$$
$$+ \lambda_4(1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

donde λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4 son los escalares a determinar.

Operando, se tiene:

$$(0 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \ \lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 + 0 \cdot \lambda_4, \ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 0 \cdot \lambda_4,$$
$$\lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4) = (0, 0, 0, 0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{array} \right.$$

ahora bien, como

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ello implica que el sistema, además de la solución

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0,$$

tiene infinitas otras no integradas exclusivamente por ceros, y que, por tanto, los vectores dados no son linealmente independientes. Al ser los vectores linealmente dependientes, podremos expresar uno de ellos como combinación lineal de los restantes; es decir:

$$\boldsymbol{V}_1 = \alpha \boldsymbol{V}_2 + \beta \boldsymbol{V}_3 + \gamma \boldsymbol{V}_4$$

o sea:

$$(0, 1, -2, 1) = \alpha(-1, 7, 2, -4) + \beta(1, 3, 2, -1) + \gamma(1, 0, 0, 1) \Longrightarrow$$
$$(0, 1, -2, 1) = (-\alpha + \beta + \gamma,\ 7\alpha + 3\beta,\ 2\alpha + 2\beta,\ -4\alpha - \beta + \gamma) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 7\alpha + 3\beta = 1 \\ 2\alpha + 2\beta = -2 \\ -4\alpha - \beta + \gamma = 1 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = 3.$$

Luego:

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2 - 2\boldsymbol{V}_3 + 3\boldsymbol{V}_4$$

12. Dado el conjunto de vectores: $(1, 1, -1)$; $(2, 2, -2)$; $(1, 3, 2)$ y $(4, 6, -1)$, hallar un sistema mínimo de generadores (57).

Solución:

El problema se reduce a conseguir el sistema mínimo de los vectores dados que sean linealmente independientes y que nos permita expresar cada uno de los vectores restantes como combinación lineal de los del sistema. Ahora bien, formada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son las componentes de los vectores dados; se observa en seguida que:

$$2.^{\text{a}} \text{ fila} = 2 \cdot 1.^{\text{a}} \quad \text{y que} \quad 4.^{\text{a}} \text{ fila} = 3 \cdot 1.^{\text{a}} + 3.^{\text{a}}$$

y como suprimidas las filas 2.ª y 4.ª nos queda la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

cuya característica es 2, podemos concluir que las filas 2.ª y 4.ª son combinación lineal de las 1.ª y 3.ª, y que, por tanto, una base o sistema mínimo de generadores del conjunto dado de vectores, está integrada por los vectores $(1, 1, -1)$ y $(1, 3, 2)$.

Verificándose, además:

$$(2, 2, -2) = 2 \cdot (1, 1, -1) + 0 \cdot (1, 3, 2)$$

y

$$(4, 6, -1) = 3 \cdot (1, 1, -1) + (1, 3, 2).$$

13. En el espacio vectorial $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{K}^3$ $(\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R})$ se dan los vectores:

$$\boldsymbol{V}_1 \equiv (3, 3, 4), \qquad \boldsymbol{V}_2 \equiv (1, -1, 2) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{V}_3 \equiv (2, 1, 3).$$

Averiguar si $\boldsymbol{V}_1$ pertenece a la variedad lineal definida por $\boldsymbol{V}_2$ y $\boldsymbol{V}_3$ y, en caso afirmativo, expresar $\boldsymbol{V}_1$ como combinación lineal de $\boldsymbol{V}_2$ y de $\boldsymbol{V}_3$.

Solución:

Si $\boldsymbol{V}_1$ pertenece a la variedad lineal definida por $\boldsymbol{V}_2$ y $\boldsymbol{V}_3$, se tendrá:

$$\boldsymbol{V}_1 = \lambda \cdot \boldsymbol{V}_2 + \mu \cdot \boldsymbol{V}_3$$

o sea:

$$(3, 3, 4) = \lambda \cdot (1, -1, 2) + \mu \cdot (2, 1, 3)$$

o, lo que es lo mismo:

$$(3, 3, 4) = (\lambda + 2\mu, \ -\lambda + \mu, \ 2\lambda + 3\mu)$$

de donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda + 2\mu = 3 \\ -\lambda + \ \mu = 3 \implies \lambda = -1, \ \mu = 2 \\ 2\lambda + 3\mu = 4 \end{array} \right.$$

Luego, efectivamente, $\boldsymbol{V}_1$ es combinación lineal de $\boldsymbol{V}_2$ y $\boldsymbol{V}_3$, es decir:

$$\boldsymbol{V}_1 = -\boldsymbol{V}_2 + 2\boldsymbol{V}_3.$$

14. Dados los vectores $\boldsymbol{V}_1 \equiv (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{V}_2 \equiv (0, 0, 1)$ y $\boldsymbol{V}_3 \equiv (2, 1, 0)$ del espacio vectorial $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{K}^3$ $(\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R})$, determinar si estos vectores forman una base y, en caso afirmativo, expresar el vector $\boldsymbol{V} \equiv (3, 5, 1)$ como combinación lineal de los tres primeros.

Solución:

a) Los vectores $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ y $\boldsymbol{V}_3$ forman una base, puesto que

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

b) Puesto que $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ y $\boldsymbol{V}_3$ forman una base se tendrá:

$$(3, 5, 1) = \lambda_1(2, 3, -1) + \lambda_2(0, 0, 1) + \lambda_3(2, 1, 0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (3, 5, 1) = (2\lambda_1 + 2\lambda_3,\ 3\lambda_1 + \lambda_3,\ -\lambda_1 + \lambda_2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 \quad + 2\lambda_3 = 3 \\ 3\lambda_1 \quad + \lambda_3 = 5 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \quad = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \frac{7}{4},\ \lambda_2 = \frac{11}{4},\ \lambda_3 = -\frac{1}{4}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{V} = \frac{7}{4}\cdot\boldsymbol{V}_1 + \frac{11}{4}\cdot\boldsymbol{V}_2 - \frac{1}{4}\cdot\boldsymbol{V}_3$$

15. Demostrar que si los vectores $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ y $\boldsymbol{V}_3$ son linealmente independientes, también lo son los vectores $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_3$ y y $\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3$.

Solución:

Para que los vectores $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_3$ y $\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3$ sean linealmente independientes, la igualdad

(1) $$\lambda_1(\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2) + \lambda_2(\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_3) + \lambda_3(\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3) = \boldsymbol{O}$$

deberá verificarse solamente para

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ahora bien, si escribimos la igualdad (1) en la forma:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{V}_1 + (\lambda_1+\lambda_3)\boldsymbol{V}_2 + (\lambda_2+\lambda_3)\boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{O}$$

y tenemos en cuenta que $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ y $\boldsymbol{V}_3$ son, por hipótesis, linealmente independientes y que, por tanto:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \quad = 0 \\ \lambda_1 \quad + \lambda_3 = 0 \\ \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Consideremos el conjunto de puntos del plano de Gauss, exceptuando los del eje de ordenadas $Y'Y$. A dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ se les hace corresponder un punto $P = P_1 * P_2$ de coordenadas $P(x_1x_2,\ x_2y_1 + y_2)$.

Demostrar que la operación $*$ confiere estructura de grupo a dicho conjunto.

2. En el producto cartesiano $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ consideremos el subconjunto $\boldsymbol{G}$ formado por los pares (x, y), tales que $y \neq 0$; se define una operación interna del siguiente modo:

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2y_1,\ y_1y_2)$$

Averiguar si la operación $*$ confiere estructura de grupo al conjunto $\boldsymbol{G}$.

Solución: Sí.

3. Se dice que dos elementos a y b de un grupo abeliano $\boldsymbol{G}$ son conjugados cuando existe un elemento $g \in \boldsymbol{G}$ tal que

$$b = g * a * g^{-1}$$

Demostrar que esta relación es de equivalencia.

4. Sea $\boldsymbol{G}$ un conjunto y $P(\boldsymbol{G})$ su conjunto de las partes. Estudiar si las siguientes operaciones, definidas en $P(\boldsymbol{G})$, lo dotan de estructura de grupo:

1.° Reunión de conjuntos.
2.° Intersección de conjuntos.
3.° Suma booleana.

Solución: 1.°, no; 2.°, no; 3.°, sí.

5. En el conjunto $\boldsymbol{R}$ de los números reales se define la operación:

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Demostrar que dicha operación confiere a $\boldsymbol{R}$ estructura de grupo. Se pide, además, probar que dicho grupo es isomorfo con respecto a la adición en $\boldsymbol{R}$.

6. Demostrar que el producto de números complejos confiere estructura de grupo abeliano al conjunto $\boldsymbol{G}$ de las cuatro raíces de la ecuación $x^4 - 1 = 0$.

7. Demostrar que si $x * x = e$ (*e* elemento neutro) para todo $x \in \boldsymbol{G}$, siendo $\boldsymbol{G}$ un grupo, éste tiene que ser abeliano.

8. Consideremos el conjunto de enteros, clases de restos módulo 7, al que dotaremos de una ley interna multiplicativa. Sea otro conjunto, el formado por los elementos, clases de restos módulo 6, al que dotamos de una ley interna aditiva.
Se pide: 1.º Demostrar que ambos conjuntos han adquirido estructura de grupo. 2.º Probar que estos dos conjuntos son isomorfos.

9. Demostrar que un grupo aditivo, al cual se agrega la ley de composición producto definida así: $a \cdot b = 0$, para todo a y para todo b es un anillo.

10. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de números son dominios de integridad?

a) Todos los enteros pares.
b) Todos los enteros impares.
c) Todos los números reales de la forma $a + b\sqrt[3]{5}$, donde a y b son enteros.
d) Todos los números reales de la forma $a + b\sqrt[3]{9}$, con a y b enteros.
e) Todos los enteros positivos.

Solución: d).

11. Se llaman «enteros de Gauss» a los números complejos $m + ni$ con m y n enteros. Demostrar que los enteros de Gauss $j_{[i]}$, constituyen un dominio de integridad.

12. Dados dos anillos M y N, consideremos el produco cartesiano $M \times N$, en el que definimos una operación $*$ y una opeción $\perp$ de la forma siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_1, n_1) * (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2) \\ (m_1, n_1) \perp (m_2, n_2) = (m_1 \cdot m_2, n_1 \cdot n_2) \end{array} \right\}; \begin{array}{l} m_i \in M \\ n_i \in N \end{array}$$

¿Tiene dicho conjunto producto, estructura de anillo? ¿Es un anillo de integridad si M y N lo son?

13. Demostrar que si al conjunto $P(A)$ le dotamos de las operaciones suma booleana e intersección se le confiere estructura de anillo conmutativo.

14. En un grupo abeliano G se considera una segunda operación definida de la forma siguiente:

$$(\forall x)(\forall y)(x \in G, y \in G): \quad x * y = y$$

¿Adquiere G con esta segunda ley estructura de anillo?

15. Demostrar que el conjunto de los números reales de la forma

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4},$$

donde a, b y c son racionales, constituye un anillo conmutativo con respecto a la suma y multiplicación ordinarias. Además, este anillo es un cuerpo.

16. Hallar para qué valores de λ las operaciones:

$$a * b = a + b - 6; \quad a \perp b = ab + \lambda a + \lambda b + 42$$

confieren estructura de anillo al conjunto Z de los números enteros.

Solución: $\lambda = -6$.

17. Un conjunto A está formado por los elementos 0 y 1. En A se definen las dos leyes de composición interna siguientes:

a) Suma, para la que

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0, \qquad 0 + 1 = 1 + 0 = 1.$$

b) Producto, para el que

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0; \qquad 1 \cdot 1 = 1.$$

Demostrar que con estas dos leyes $\boldsymbol{A}$ queda dotado con estructura de cuerpo.

18. Demostrar que un conjunto $\boldsymbol{A}$, dotado con estructura de cuerpo, no admite divisores de cero.

19. Demostrar que la suma y el producto ordinarios confieren estructura de cuerpo al conjunto

$$\boldsymbol{A} \equiv \{x | x = a + b\sqrt{2},\ a \in \boldsymbol{R},\ b \in \boldsymbol{R}\}.$$

20. Se consideran los pares ordenados de números racionales $z = (a, b)$ con las leyes de composición

$$z + z' = (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
$$z \cdot z' = (a, b) \cdot (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + a'b).$$

Demostrar que forman un cuerpo.

21. Demostrar que el conjunto de los polinomios de grado n (n constante) forman un espacio vectorial.

22. ¿Existe alguna dependencia lineal entre los vectores

$$\boldsymbol{V}_1 \equiv (1, 0, 0, -1); \qquad \boldsymbol{V}_2 \equiv (0, 1, 1, 0);$$
$$\boldsymbol{V}_3 \equiv (2, 1, 1, -2) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{V}_4 \equiv (1, -1, -1, -1)?$$

Solución:

$$\boldsymbol{V}_3 = 2\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2; \qquad \boldsymbol{V}_4 = \boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2$$

23. Dados los tres vectores

$$\boldsymbol{V}_1 \equiv (1, 1, 0, m); \quad \boldsymbol{V}_2 \equiv (3, -1, n, -1) \quad \text{y}$$
$$\boldsymbol{V}_3 \equiv (-3, 5, m, -4),$$

determinar los valores que han de tener las componentes m y n para que exista entre ellos una relación de dependencia lineal. Así mismo, hállese dicha relación.

Solución:

$$m = -2,\ n = 1. \qquad \boldsymbol{V}_3 = 3\boldsymbol{V}_1 - 2\boldsymbol{V}_2.$$

24. Dados los vectores $(1, 1, -2)$, $(2, -1, 1)$, $(4, -5, 7)$ y $(3, -3, 4)$, hallar un sistema mínimo de generadores del subespacio engendrado por dichos vectores. Estúdiese si dicho subespacio es el mismo que el engendrado por los vectores $(1, -2, 3)$ y $(3, 0, -1)$.

Solución:

a) $(1, 1, -2)$ y $(2, -1, 1)$; *b)* Sí.

25. Demuéstrese que el conjunto

$$A \equiv \{(x, y, y, -x) \mid x, y, \in \boldsymbol{R}\}$$

con una operación suma definida así:

$$(x, y, y, -x) + (m, n, n, -m) = [x+m, y+n, y+n, -(x+m)]$$

y con el producto por un escalar $\alpha \in \boldsymbol{R}$ definido por:

$$\alpha \cdot (x, y, y, -x) = (\alpha x, \alpha y, \alpha y, -\alpha x)$$

constituye un espacio vectorial bidimensional.

26. En el espacio vectorial $\boldsymbol{K}^4$ $(\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R})$. Averiguar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de $\boldsymbol{K}^4$.

1.° $A \equiv \{(3x_2, x_2, x_4 + x_2, x_4) \mid x_2, x_4 \in \boldsymbol{R}\}$.
2.° $A \equiv \{(x_1, x_2, x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \boldsymbol{Z}\}$.
3.° $A \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$.
4.° $A \equiv \{(x_1, x_1, x_1, x_1) \mid x_1 \in \boldsymbol{R}\}$.
5.° $A \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + 2x_4 = 0\}$.
6.° $A \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + 2x_4 = 7\}$.

Solución:

1.°, sí; 2.°, no; 3.°, no; 4.°, sí; 5.°, sí; 6.°, no.

27. Estudiar la posibilidad de que los cuatro vectores siguientes constituyan una base del espacio $\boldsymbol{K}^4$ $(\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R})$:

$$\boldsymbol{V}_1 \equiv (0, 1, -2, 1); \qquad \boldsymbol{V}_2 \equiv (1, 1, 2, -1);$$
$$\boldsymbol{V}_3 \equiv (1, 0, 0, 1); \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{V}_4 \equiv (2, 2, 0, -1).$$

Solución: Sí.

28. Determinar p de manera que los tres vectores $(3,\ 1,\ -4,\ 6)$, $(1,\ 1,\ 4,\ 4,)$ y $(1,\ 0,\ -4,\ p)$ sean dependientes.

Solución: $p=1$.

29. 1.° En un espacio cuatridimensional, determinar p y q para que los tres vectores

$$\boldsymbol{V}_1 \equiv (-1, 0, p, 1), \quad \boldsymbol{V}_2 \equiv (p, 1, -2, 3)$$
$$\text{y} \quad \boldsymbol{V}_3 \equiv (0, -1, q, 0)$$

sean linealmente dependientes.

2.° Obtenidos p y q para que $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ y $\boldsymbol{V}_3$ sean linealmente dependientes, hallar la relación que liga estos vectores.

3.° Encontrar la relación entre las componentes del vector $\boldsymbol{V} \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$ para que pertenezca al subespacio vectorial engendrado por $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ y $\boldsymbol{V}_3$.

Solución:

1.° $p=-3,\ q=-7$.

2.° $3\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{V}_3=\boldsymbol{O}$.

3.° $x_3-3x_1-7x_2=0$.

7

álgebra matricial

60. Matrices

Definiciones. Dado un cuerpo $\boldsymbol{K}$, que desde ahora en adelante y, salvo que se advierta lo contrario, supondremos es el cuerpo $\boldsymbol{R}$ de los números reales, llamaremos matriz de dimensiones n y m sobre el *dominio* $\boldsymbol{K}$ a todo cuadro rectangular de $n \cdot m$ números de $\boldsymbol{K}$, distribuidos en n filas y m columnas. La palabra línea designará indistintamente fila o columna.

A los números que integran la matriz los llamaremos *elementos* de ésta, y los representaremos con una misma letra (a, por ejemplo), afectada de un par de subíndices El primero nos indicará el número de orden de fila en que el elemento se encuentra, contadas éstas de arriba abajo, y el segundo el número de orden de columna, contadas de izquierda a derecha. Así, por ejemplo, el elemento situado en la fila quinta, columna octava, lo representaremos con la notación a_{58}.

Adoptando la repetida notación, una matriz de dimensiones n y m tomará la forma:

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm}
\end{matrix}
$$

La matriz como un todo será denotada por $\boldsymbol{A}$ (mayúscula en negrita de la letra genérica usada en la representación de los elementos de la matriz) o por $[a_{ij}]$. Finalmente, cuando interese especificar los elementos de la matriz, preferiblemente usaremos la notación que a continuación se indica:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Cuando interese poner de manifiesto las dimensiones n y m de una matriz $\boldsymbol{A}$, escribiremos: $\boldsymbol{A}_{n,m}$.

Se llama *opuesta* de una matriz dada $\boldsymbol{A}_{n,m}$, y se representa con la notación $-\boldsymbol{A}_{n,m}$, o bien $-\boldsymbol{A}$, a la matriz de iguales dimensiones que la dada y cuyos elementos son opuestos a los correspondientes de la repetida matriz dada.

Ejemplo:

La opuesta de la matriz

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -5 \\ 5 & 0 & -2 & 4 \\ 7 & -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{es,} \quad -\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 & 5 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \\ -7 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se llama *altura* de la matriz al número n de sus filas y *longitud* al número m de sus columnas.

El producto $n \cdot m$ es el orden de la matriz.

Si $n \neq m$ la matriz se llama *rectangular,* siendo *horizontal* o *vertical* según que n sea menor o mayor que m, respectivamente.

Si $n=m$, la matriz se llama *cuadrada de orden n.*

Las matrices que constan de una sola fila o de una sola columna se llaman (56) vectores-fila o vectores-columna, respectivamente; a sus elementos los afectaremos de un solo subíndice; escribiremos así:

$$\boldsymbol{A}=(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

para vector-fila, y

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

para vector-columna; a veces la letra que se usa para representar la matriz es distinta de la letra genérica empleada para los elementos; así, por ejemplo:

$$V=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m).$$

Por razones de brevedad, diremos que una línea es *producto* de otra paralela por un número cuando cada elemento de aquélla resulte de multiplicar los correspondientes de ésta por dicho número. Diremos que una línea es *suma* de otras cuando sus elementos resultan de sumar los correspondientes de estas otras.

Finalmente, se dirá que una línea es *combinación lineal* de otras paralelas l_1, l_2, ..., l_h cuando resulte de sumar éstas, previamente multiplicadas por números cualesquiera λ_1, λ_2, ..., λ_h.

Ejemplo:

En la matriz de orden 4·5:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & -3 \\ -6 & 4 & -8 & 2 & -10 \\ 5 & -12 & 16 & -11 & 21 \end{pmatrix}$$

la tercera fila es producto de la primera por -2 y la cuarta es la suma de la primera y la segunda, previamente multiplicadas por 3 y -2, respectivamente.

Esta cuarta fila es, por tanto, combinación lineal de la primera y segunda.

Puesto que la altura y la longitud de esta matriz son distintas, es una matriz rectangular, y como la altura es menor que la longitud es, concretamente, una matriz rectangular horizontal.

Si en una matriz se suprimen varias filas y columnas, obtendremos una matriz de inferior orden, a la que llamaremos *submatriz* de la primera.

Ejemplo:

Sea la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 1/3 & 4 & -6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & -8 & 7 \\ 2 & -3 & 4 & 8 & 2/5 & -3 \end{pmatrix}$$

Suprimiendo las filas segunda y cuarta y las columnas tercera, cuarta y sexta, obtendremos la submatriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas. Ya dijimos anteriormente que en el caso particular $n = m$, a la matriz se le llama cuadrada de orden n.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En éstas, se llaman *elementos principales* a los que tienen los dos subíndices iguales.

Llamaremos *diagonal principal* a la formada por elementos principales, a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}. A la otra diagonal de la matriz se le llama *secundaria.*

Elementos *conjugados* son los que tienen subíndices iguales, pero en distinto orden; así, el elemento conjugado de a_{53} es a_{35}.

Los elementos conjugados son simétricos con respecto a la diagonal principal.

Llamaremos *líneas conjugadas* a las formadas por elementos conjugados. Es inmediato que la conjugada de una fila es la columna homónima, y viceversa; así, la conjugada de la fila tercera es la columna tercera.

Igualdad. Dos matrices de igual orden $n \cdot m$, $[a_{ij}]$ y $[b_{ij}]$, diremos que son *iguales* si, y sólo si,

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m.$$

Por tanto, la igualdad de matrices implica: igualdad de alturas, igualdad de longitudes e igualdad de elementos correspondientes.

Trasposición. Diremos que una matriz rectangular $A^t = [a_{ji}]$ es traspuesta de otra $A = [a_{ij}]$ si las filas (*columnas*) de la primera figuran como columnas (*filas*) en la segunda.

Ejemplo:

La traspuesta de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 7 \\ ^3/_4 & 0 & 2 & -8 \\ 3 & 7 & -9 & ^2/_5 \end{pmatrix} \quad \text{es} \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & ^3/_4 & 3 \\ -5 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & -9 \\ 7 & -8 & ^2/_5 \end{pmatrix}$$

De la definición se sigue con carácter de inmediata evidencia que:

$$(A^t)^t = A.$$

61. Partición de matrices

I. La matriz $A_{n,m}$ se supone formada por $n \cdot m$ elementos distribuidos en n filas y m columnas; pero qué duda cabe que, también, podemos suponerla constituida por n vectores-fila de orden m cada uno de ellos, o por m vectores-columna de orden n cada uno.

Por tanto, si

$$\begin{aligned} V_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}) \\ V_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ V_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}) \end{aligned}$$

son los n vectores-fila, y

$$V_1' = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad V_2' = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad V_m' = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

son los m vectores columna, se podrá escribir:

$$A_{n,m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = (V_1', V_2', \dots, V_m')$$

II. Más general, una matriz dada puede descomponerse o *particionarse* en varias submatrices o *cajas*, trazando paralelas a los bordes del cuadro rectangular.

Así, por ejemplo, hemos procedido con la matriz siguiente, la cual ha sido particionada en seis cajas mediante el trazado de las tres rectas que se indican de puntos.

$$A = \left(\begin{array}{ccc:cc:cccc} 3 & -2 & 5 & 4 & -8 & 7 & 6 & 4 & 3/4 \\ -5 & 6 & 1 & -6 & 7 & -2 & 4 & 8 & -5 \\ 2/5 & 8 & -7 & 3 & -5/3 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ \hdashline 3 & 7/2 & 4 & 2 & 8 & 3 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 3 & 7 & 8 & 2 & -4 \end{array} \right)$$

Si las submatrices que están en la primera horizontal (ordenadas de izquierda a derecha), las representamos por A_{11}, A_{12}, A_{13}, y las que están en la segunda horizontal (en igual orden) las representamos por A_{21}, A_{22} y A_{23}, se podrá escribir:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

Recíprocamente, A puede suponerse formado por la yuxtaposición de seis cajas en el orden indicado en el ejemplo. Esta forma de concebir A equivale a considerar ésta como una matriz sobre un dominio, cuyos elementos son, a su vez, matrices.

62. Matrices especiales

Definiciones. 1. MATRIZ DIAGONAL. Llamaremos así a toda matriz cuadrada cuyos elementos no principales son nulos.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para representar una matriz diagonal de orden n usaremos la notación D_n, y si queremos especificar los elementos que figuran en la diagonal principal emplearemos la notación

$$D(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}).$$

La matriz del ejemplo podrá, pues, representarse en una de las formas: D_3 y $D(3, -5, 2)$.

2. MATRIZ ESCALAR. Es una matriz diagonal, que tiene sus elementos principales iguales entre sí.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3. MATRIZ UNIDAD. Es una matriz escalar, cuyos elementos principales son iguales a 1.

La matriz unidad de orden n se representa con la notación $\boldsymbol{I}_n$.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz unidad de orden n está formada por n filas, que son los n vectores unidad, es decir:

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$$

Análogamente, podemos suponerla formada por n columnas, que son los n vectores unidad, es decir:

$$\boldsymbol{I}_n = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

4. MATRIZ NULA. Es la matriz rectangular (cuadrada o no) que tiene todos sus elementos nulos; la representaremos con la notación $\boldsymbol{O}$, o bien $\boldsymbol{O}_{n,m}$, si se quieren especificar las dimensiones de la matriz.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{O}_{3,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. MATRIZ TRIANGULAR. Es la matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que están a un mismo lado de la diagonal principal.

La matriz triangular es *superior* o *inferior*, según que los elementos nulos sean los que están encima o debajo, respectivamente, de la diagonal principal.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 9 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -4 & 6 & -8 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Ambas son matrices triangulares, superior la primera e inferior la segunda.

Es inmediato que la traspuesta de una matriz triangular superior (inferior) es inferior (superior).

6. Matriz simétrica. Es la que coincide con su traspuesta. Si una matriz es simétrica, sus dimensiones tendrán que ser iguales y, por tanto, será cuadrada.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7/2 & -4 \\ 5 & -8 & 6 & 2/3 \\ 7/2 & 6 & 9 & -2 \\ -4 & 2/3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz no-negativa. Es la matriz rectangular (cuadrada o no), cuyos elementos son no-negativos, es decir, tales que $a_{ij} \geqslant 0$ para todo $i=1, 2, 3, \ldots, n$; $j=1, 2, 3, \ldots, m$.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son matrices no-negativas.

8. MATRIZ DE MINKOWSKI-LEONTIEF. Es la matriz cuadrada no-negativa que tiene la propiedad de que la suma de los números obtenidos sumando los elementos de cada columna es no mayor que uno.

Por tanto, para que la matriz cuadrada no-negativa de orden n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sea de Leontief, tendrá que verificarse:

$$(a_{11}+a_{21}+a_{31}+\dots+a_{n1})+(a_{12}+a_{22}+a_{32}+\dots+a_{n2})+$$
$$+(a_{13}+a_{23}+a_{33}+\dots+a_{n3})+\dots+(a_{1n}+a_{2n}+a_{3n}+\dots+a_{nn})=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j}+a_{3j}+\dots+a_{nj})=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)\leqslant 1$$

63. Cálculo matricial

Si $\boldsymbol{K}$ es el cuerpo de los números reales, n y m dos números naturales dados y representamos con $\boldsymbol{M}'$ el conjunto de todas las matrices de órdenes $n \cdot m$ sobre el dominio $\boldsymbol{K}$; qué duda cabe que $\boldsymbol{M}'$ será un subconjunto del conjunto $\boldsymbol{M}$ de todas las matrices de dimensiones finitas sobre el mismo dominio $\boldsymbol{K}$.

Una vez fijados los números n y m, vamos a definir sobre el subconjunto $\boldsymbol{M}'$, operaciones tanto internas como externas, así como diversos algoritmos.

El conjunto de reglas operatorias y algoritmos que definimos a continuación constituye el *cálculo matricial*.

64. Igualdad de matrices

Dos matrices $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ y $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$, del conjunto $\boldsymbol{M}'$ de todas las matrices de órdenes $n \cdot m$, dijimos (60) que son iguales si:

$$a_{ij}=b_{ij} \quad \text{para todo} \quad i=1, 2, \ldots, n; \quad j=1, 2, \ldots, m.$$

Propiedades. De la definición de igualdad de matrices se siguen, con carácter de inmediatas, las propiedades siguientes:

1.° $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$ Reflexiva.

2.° $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \Longrightarrow \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ Simétrica.

3.° $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C} \Longrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$ Transitiva.

65. Suma

I. Dadas las matrices de $\boldsymbol{M}'$: $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ y $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ sobre $\boldsymbol{K}$. La suma viene definida por la igualdad:

$$[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

II. Si las matrices de $\boldsymbol{M}'$ son tres o más, llamaremos *suma* de ellas a la matriz de $\boldsymbol{M}'$ cuyos elementos son la suma de los correspondientes de las matrices sumando.

Si $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ y $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$ son las matrices de $\boldsymbol{M}'$ sobre $\boldsymbol{K}$, la suma viene definida por la igualdad:

$$[a_{ij}]+[b_{ij}]+[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}]$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Propiedades. De las definiciones anteriores de igualdad y suma de matrices se siguen, con carácter de inmediatas, las propiedades siguientes:

1.ª	$A+B \in M'$	Clausura.
2.ª	$(A+B)+C=A+(B+C)$	Asociativa.
3.ª	$A+0=0+A=A$	Existencia de neutro.
4.ª	$A+(-A)=(-A)+A=0$	Existencia de opuesto.
5.ª	$A+B=B+A$	Conmutativa.

Las propiedades anteriores nos prueban que la definición de suma dada en el número anterior confiere estructura de grupo aditivo abeliano (50) al conjunto de todas las matrices de orden $n \cdot m$.

Teorema. *La traspuesta de una suma de matrices es la suma de las traspuestas de cada una de dichas matrices, es decir:*

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

En efecto, si $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$, se tendrá:

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$$

de donde

$$(A+B)^t=[a_{ji}+b_{ji}]$$

y como

$$A^t=[a_{ji}] \quad \text{y} \quad B^t=[b_{ji}]$$

será:

$$A^t+B^t=[a_{ji}+b_{ji}]$$

y, por tanto:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^t=\boldsymbol{A}^t+\boldsymbol{B}^t$$

como se quería probar.

DIFERENCIA. Dadas las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{M}'$, se llama *diferencia* entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ a la matriz que se obtiene sumando a $\boldsymbol{A}$ la opuesta de $\boldsymbol{B}$. Por tanto, si la diferencia entre las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ la representamos con la notación $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, por definición se tendrá:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 & -3 \\ 8 & -2 & 5 & -4 \\ 6 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & -7 & 3 \\ -8 & 2 & -5 & 4 \\ -6 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 & 8 \\ -2 & 4 & -10 & 12 \\ -2 & -1 & 7 & -14 \end{pmatrix}$$

66. Multiplicación por un escalar

Si $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ es una matriz de orden $n \cdot m$, sobre $\boldsymbol{K}$ y λ es un número real cualquiera, llamaremos *producto* del número λ por la matriz $\boldsymbol{A}$ a la matriz que se obtiene multiplicando por λ cada elemento de $\boldsymbol{A}$.

Ejemplo:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 & 20 & 5 \\ 0 & 15 & -10 & 20 \\ 5 & 25 & 15 & -20 \end{pmatrix}$$

Propiedades. Si A y B son matrices de igual orden $n \cdot m$, λ y μ son números reales cualesquiera, es fácil probar las propiedades siguientes:

1.ª	$\lambda \cdot A \subseteq M$	Clausura.
2.ª	$\lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$	Distributividad.
3.ª	$(\lambda+\mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$	
4.ª	$(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A) = \mu \cdot (\lambda \cdot A)$	Asociatividad.
5.ª	$1 \cdot A = A$	El elemento unidad de K es neutro.

Las propiedades anteriores nos prueban que las definiciones de suma de matrices y de producto externo de un escalar por una matriz confieren estructura de espacio vectorial (54), sobre el cuerpo K, al conjunto de todas las matrices de orden $n \cdot m$.

Matriz antisimétrica. Una matriz A se llama *antisimétrica* si es opuesta de su traspuesta, es decir, si

$$A = -A^t$$

La igualdad anterior implica que la matriz A sea cuadrada; además, debe ser $a_{ij} = -a_{ji}$ y, por tanto, $a_{ii} = 0$, es decir: *Los elementos de la diagonal principal de las matrices antisimétricas son nulos.*

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 & -2 \\ 3 & 0 & -4 & 5 \\ -7 & 4 & 0 & 8 \\ 2 & -5 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio:

Expresar una matriz cuadrada cualquiera A como suma de una simétrica y otra antisimétrica.

Resolución:

Si con objeto de fijar ideas suponemos que se trata de una matriz cuadrada de orden 3, el problema se reduce a resolver la ecuación en x_{ij} e y_{ij} siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & y_{12} & y_{13} \\ -y_{12} & 0 & y_{23} \\ -y_{13} & -y_{23} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}+y_{12} & x_{13}+y_{13} \\ x_{12}-y_{12} & x_{22} & x_{23}+y_{23} \\ x_{13}-y_{13} & x_{23}-y_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$$

de donde

$$a_{ii}=x_{ii}, \qquad a_{ij}=x_{ij}+y_{ij}, \qquad a_{ji}=x_{ij}-y_{ij}$$

resolviendo el sistema formado por las dos últimas ecuaciones se tiene:

$$x_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}); \qquad y_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 3 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 & ^9/_2 \\ 5 & -7 & ^7/_2 \\ ^9/_2 & ^7/_2 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 & -^3/_2 \\ -3 & 0 & ^1/_2 \\ ^3/_2 & -^1/_2 & 0 \end{pmatrix}$$

67. Producto de matrices

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

de órdenes $n \cdot m$ y $m \cdot p$, respectivamente, se llama *producto* de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$ a la matriz:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2p} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{np} \end{pmatrix}$$

de orden $n \cdot p$, tal que:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{im} \cdot b_{mj}$$

es decir, el elemento c_{ij} de $\boldsymbol{C}$ es la suma de los productos de los m elementos de la fila de lugar i de $\boldsymbol{A}$ por los m elementos correspondientes de la columna de lugar j de $\boldsymbol{B}$.

Si el producto de la matriz $\boldsymbol{A}$ por la matriz $\boldsymbol{B}$ lo representamos con la notación $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, o bien $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$, se podrá escribir:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$$

Concretando, diremos que $\boldsymbol{A}$ *multiplica a* $\boldsymbol{B}$ *por la izquierda*, o bien que $\boldsymbol{A}$ *premultiplica a* $\boldsymbol{B}$.

Si el determinante * de una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ lo representamos con la notación $d(\boldsymbol{A})$, es fácil probar que, si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son dos matrices cuadradas cualesquiera de igual orden, se tiene:

(3) $$d(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = d(\boldsymbol{A}) \cdot d(\boldsymbol{B}).$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -3 & -2 \\ 16 & 15 & -18 \\ 25 & 15 & -20 \end{pmatrix}$$

---

* Aunque la teoría de los determinantes se supone conocida del lector, si éste quiere repasarla puede hacerlo en el primer tomo de la obra *Matemáticas Generales*, de ALFONSO BURGOS, páginas 56 y siguientes. Tercera edición.

Observaciones. 1. La multiplicación de dos matrices es posible solamente si el número de columnas del multiplicando coincide con el número de filas del multiplicador.

2. Si invertimos el orden de los factores tendríamos que multiplicar una matriz de orden $m \cdot p$ por otra de orden $n \cdot m$, operación imposible salvo que sea $p = n$, o sea, que el orden del multiplicando sea $n \cdot m$ y el del multiplicador $m \cdot n$; esto es, que el número de filas (columnas) de la matriz multiplicando coincida con el número de columnas (filas) de la matriz multiplicador.

3. Aun en el caso de que sean posibles los productos $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, los resultados, en general, serán distintos.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -8 \\ -24 & 16 \end{pmatrix}$$

En cambio:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -4 & 10 & -22 \\ 10 & -9 & 23 \end{pmatrix}$$

El ejemplo anterior nos prueba que el *producto de matrices no tiene la propiedad conmutativa.*

Si, en particular, dos matrices tienen la propiedad conmutativa para la multiplicación, diremos que dichas matrices *conmutan.*

Producto de varias matrices. Para poder llevar a efecto la multiplicación de varias matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ..., en este orden, es necesario que el número de columnas de cada una coincidan con el número de filas de la siguiente.

Así, por ejemplo, se podrán multiplicar las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ..., en este orden, si sus órdenes son, respectivamente, $n \cdot m$, $m \cdot p$, $p \cdot q$, ... El producto de esas matrices lo representaremos con la notación: $[(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}]$ ..., o bien en la forma más simple: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ ..., entendiendo que habrá que multiplicar $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$, el resultado por $\boldsymbol{C}$, etc.

68. Propiedades de la multiplicación

Por razones de brevedad, daremos sin demostración las propiedades siguientes *:

Propiedad asociativa. Si A, B y C son matrices tales que el número de columnas de A es igual al número de filas de B y el número de columnas de ésta coincide con el número de filas de C, se verifica:

(1) $$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Propiedad distributiva. Si las matrices B y C son sumables (65) y el número de columnas de A es igual al número de filas de las matrices B y C, se verifica:

(2) $$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{Distributividad por la derecha.}$$

Si las matrices B y C son sumables y el número de columnas de éstas es igual al número de filas de la matriz A, se verifica:

(3) $$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \quad \text{Distributividad por la izquierda.}$$

Multiplicación por un escalar. Si $\lambda \in K$, se tiene:

(4) $$\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$$

Elemento neutro. 1.° El elemento neutro para la multiplicación por la derecha de las matrices de orden $n \cdot m$, es la matriz unidad de orden m (62.3), pues, en efecto:

(5) $$A_{n,m} \cdot I_m = A_{n,m}$$

2.° El elemento neutro para la multiplicación por la izquierda de las matrices de orden $n \cdot m$ es la matriz unidad de orden n, pues, en efecto:

(6) $$I_n \cdot A_{n,m} = A_{n,m}$$

* La demostración puede verse en las páginas 308 y siguientes de la obra: *Algebra Moderna*, por A. LENTIN y J. RIVAUD. Colección «Ciencia y Técnica», Editorial Aguilar, Madrid.

3.° El elemento neutro para la multiplicación (por la derecha y por la izquierda) de las matrices cuadradas de orden n, es la matriz unidad de orden n, pues, en efecto:

$$(7) \qquad A_n \cdot I_n = I_n \cdot A_n = A_n$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 2 \\ -5 & 8 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 2 \\ -5 & 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 2 \\ -5 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

Las propiedades (5), (6) y (7) justifican el nombre de matriz unidad dado en (62.3).

Traspuesta del producto. Si A, B y C son matrices multiplicables en el orden dado, se verifica:

$$(8) \qquad (A \cdot B \cdot C)^t = C^t \cdot B^t \cdot A^t$$

es decir: *Se obtiene la traspuesta de un producto de varias matrices, multiplicando en orden inverso las traspuestas de sus factores.*

69. Anillo de las matrices cuadradas

El conjunto M', de las matrices cuadradas de orden n, es cerrado para las operaciones de suma y producto. La primera de las operaciones confiere al conjunto M' estructura de grupo aditivo (65) y, como la segunda, es asociativa y distributiva con respecto a la suma, las dos leyes dotan al repetido conjunto M' con estructura de anillo (51), resumiendo:

El conjunto de las matrices cuadradas de orden n sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ *es un anillo.*

Por otra parte, como existe elemento neutro para la multiplicación (68, 3.º), el *anillo es unitario.*

Finalmente, como, en general, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$, *el anillo no es conmutativo.*

Divisores de cero. *El anillo no es de integridad,* pues la igualdad $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$ no implica que uno al menos de los factores sea la matriz nula, como lo prueba el siguiente

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}$$

y, sin embargo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{O} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{O}$$

70. Inversión de una matriz cuadrada

Si

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden *n no singular,* esto es: una matriz cuadrada de determinante no nulo. Llamaremos *inversa* o *recí-*

proca de A, y la representaremos con la notación A^{-1}, a la matriz

$$(1)\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{A} & \frac{A_{21}}{A} & \frac{A_{31}}{A} & \cdots & \frac{A_{n1}}{A} \\ \frac{A_{12}}{A} & \frac{A_{22}}{A} & \frac{A_{32}}{A} & \cdots & \frac{A_{n2}}{A} \\ \frac{A_{13}}{A} & \frac{A_{23}}{A} & \frac{A_{33}}{A} & \cdots & \frac{A_{n3}}{A} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{A} & \frac{A_{2n}}{A} & \frac{A_{3n}}{A} & \cdots & \frac{A_{nn}}{A} \end{pmatrix}$$

donde A es el determinante de la matriz A y A_{ij} ($i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n$) es el adjunto del elemento a_{ij}.

Finalmente, si sacamos factor común $1/A$ (66), la matriz anterior puede ser escrita en la forma más simple

$$A^{-1}=\frac{1}{A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & A_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Para hallar la inversa de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

hemos de comenzar por calcular

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}=-50+54+16-15-60+48=-7$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-5 & 6\\ -4 & 5\end{vmatrix}=-1, \quad A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 6\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}4 & -5\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -4 & 5\end{vmatrix}=-11, \quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=13,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=17$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -5 & 6\end{vmatrix}=13, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-16.$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-22$$

valores que, sustituidos en (1), nos da:

$$\begin{pmatrix}\frac{-1}{-7} & \frac{-11}{-7} & \frac{13}{-7}\\ \frac{-2}{-7} & \frac{13}{-7} & \frac{-16}{-7}\\ \frac{-1}{-7} & \frac{17}{-7} & \frac{-22}{-7}\end{pmatrix}$$

o su equivalente

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}1 & 11 & -13\\ 2 & -13 & 16\\ 1 & -17 & 22\end{pmatrix}$$

Existencia de inversa de cada matriz cuadrada no singular. Si A es una matriz cuadrada no singular, es fácil comprobar que:

(2) $$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$$

Estas igualdades justifican la denominación de inversa de A dada A^{-1}.

Inversa del producto de dos matrices cuadradas. Si A y B son dos matrices cuadradas no singulares de igual orden, en virtud del teorema 2 del núm. 44, se tendrá:

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}.$$

71. División de matrices

Dadas las matrices cuadradas de orden n, $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, donde $\boldsymbol{B}$ es no-singular, llamaremos *postdivisión* de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$ a la matriz obtenida multiplicando la matriz $\boldsymbol{A}$ por la inversa de $\boldsymbol{B}$, esto es, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}$.

En cambio, llamaremos *predivisión* de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$ a la matriz obtenida multiplicando la inversa de $\boldsymbol{B}$ por la matriz $\boldsymbol{A}$, esto es, $\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}$.

Si la postdivisión y predivisión de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$ las representamos con las notaciones respectivas $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$ y $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$, se tendrá:

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}$$

72. Matrices ortogonales

I. Diremos que una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ es *ortogonal* si multiplicada por su traspuesta $\boldsymbol{A}^t$ nos da la matriz unidad, es decir, si:

(1) $$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^t=\boldsymbol{I}$$

Ahora bien, como de la igualdad anterior se sigue que la matriz $\boldsymbol{A}$ tiene que ser no-singular, se tendrá (70.2):

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$$

Luego:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^t=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1} \Longrightarrow \boldsymbol{A}^t=\boldsymbol{A}^{-1}$$

Esto es:

La traspuesta e inversa de toda matriz ortogonal coinciden.

II. Las igualdades (70.2) y la propiedad obtenida nos permite escribir:

(2) $$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^t=\boldsymbol{A}^t\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$$

Es decir:

Toda matriz ortogonal conmuta con su traspuesta y su producto común es la matriz unidad.

Vamos ahora a proceder a conseguir las relaciones que se deben verificar entre los elementos de una matriz cuadrada para que ésta sea ortogonal.

III. Si con objeto de simplificar, suponemos que la matriz ortogonal A es de tercer orden, la igualdad (1) podrá ser escrita en la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando e igualando términos correspondientes, se tiene:

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1\,, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 \\ a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0 \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0 \end{cases}$$

Pero como, en virtud de (2), también $A^t \cdot A = I$.

Sustituyendo, operando e igualando términos correspondientes, tendremos:

$$(4) \qquad \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1\,, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0 \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0 \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0 \end{cases}$$

Las igualdades (3) y (4) nos permiten concluir que la condición para que una matriz sea ortogonal es que:

La suma de los cuadrados de los elementos de cada una de sus líneas valga uno y que la suma de los productos de los elementos correspondientes de líneas paralelas valga cero.

IV. Como la igualdad $A^t \cdot A = I$ puede ser escrita en la forma equivalente:

$$A^t \cdot (A^t)^t = I$$

podemos decir: *La traspuesta de una matriz ortogonal es también ortogonal.*

Determinantes ortogonales. Si a los determinantes de las matrices ortogonales les llamamos también *ortogonales*, y representamos con A y A^t los determinantes de las matrices ortogonales $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^t$ y tenemos en cuenta que el determinante de cualquier matriz unidad vale 1, de la igualdad $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^t=\boldsymbol{I}$ se sigue (70.3), que:

$$A\cdot A^t=1$$

Pero como $A^t=A$, tendremos:

$$A^2=1 \implies A=\pm 1$$

Según que el determinante de una matriz ortogonal valga $+1$ ó -1, a ésta la llamaremos *directa* o *inversa*, respectivamente.

Ejemplo:

La matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

es ortogonal, puesto que (3):

$$\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1, \quad (-\operatorname{sen}\alpha)^2+\cos^2\alpha=1,$$
$$\cos\alpha\,(-\operatorname{sen}\alpha)+\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha=0;$$

o bien (4):

$$\cos^2\alpha+(-\operatorname{sen}\alpha)^2=1, \quad \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$
$$\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha+(-\operatorname{sen}\alpha)\cdot\cos\alpha=0.$$

73. Regla de Cramer

Una de las aplicaciones del Cálculo Matricial es la deducción de la *regla de Cramer*.

Dado un sistema de igual número de ecuaciones lineales que de incógnitas, en el que supondremos que la matriz de los coeficientes de las incógnitas es no-singular:

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=k_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=k_2 \\
a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n=k_3 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n=k_n
\end{array}\right.$$

o, lo que es lo mismo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \dots \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si representamos con $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{K}$, respectivamente, la matriz de los coeficientes de las incógnitas, la matriz columna de las incógnitas y la matriz columna de los términos independientes, el sistema anterior puede ser escrito en la forma más breve:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{K}$$

Premultiplicando por $\boldsymbol{A}^{-1}$, se tiene:

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{K} \Longrightarrow (\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{K} \Longrightarrow \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{K}$$

de donde:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{K}$$

Si representamos el determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$ con la letra A, sustituimos $\boldsymbol{A}^{-1}$ por la expresión obtenida para ella en (70.1) y, finalmente, volvemos a la notación matricial para $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{K}$, tendremos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{A} & \frac{A_{21}}{A} & \frac{A_{31}}{A} & \dots & \frac{A_{n1}}{A} \\ \frac{A_{12}}{A} & \frac{A_{22}}{A} & \frac{A_{32}}{A} & \dots & \frac{A_{n2}}{A} \\ \frac{A_{13}}{A} & \frac{A_{23}}{A} & \frac{A_{33}}{A} & \dots & \frac{A_{n3}}{A} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \frac{A_{1n}}{A} & \frac{A_{2n}}{A} & \frac{A_{3n}}{A} & \dots & \frac{A_{nn}}{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \dots \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}K_1 + A_{21}K_2 + A_{31}K_3 + \dots + A_{n1}K_n}{A} \\ \dfrac{A_{12}K_1 + A_{22}K_2 + A_{32}K_3 + \dots + A_{n2}K_n}{A} \\ \dfrac{A_{13}K_1 + A_{23}K_2 + A_{33}K_3 + \dots + A_{n3}K_n}{A} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{A_{1n}K_1 + A_{2n}K_2 + A_{3n}K_3 + \dots + A_{nn}K_n}{A} \end{pmatrix}$$

de donde:

$$x_1 = \frac{A_{11}K_1 + A_{21}K_2 + A_{31}K_3 + \dots + A_{n1}K_n}{A}$$

$$x_2 = \frac{A_{12}K_1 + A_{22}K_2 + A_{32}K_3 + \dots + A_{n2}K_n}{A}$$

$$x_3 = \frac{A_{13}K_1 + A_{23}K_2 + A_{33}K_3 + \dots + A_{n3}K_n}{A}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}K_1 + A_{2n}K_2 + A_{3n}K_3 + \dots + A_{nn}K_n}{A}$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta que el polinomio

$$A_{1i}K_1 + A_{2i}K_2 + A_{3i}K_3 + \dots + A_{ni}K_n; \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

es el desárrollo del determinante que se obtiene al sustituir en A la columna de lugar i por la columna de los términos independientes del sistema, tendremos, en definitiva:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ k_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{A}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & k_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & k_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{A},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & k_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & k_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & k_n \end{vmatrix}}{A}.$$

Regla de Cramer. *Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, en el que el determinante de los coeficientes de las incógnitas es distinto de cero, tiene solución única. El valor de cada incógnita es una fracción cuyo denominador es el determinante del sistema y cuyo numerador se obtiene sustituyendo en el anterior determinante la columna de los coeficientes de la incógnita que se despeja por la columna de los términos independientes.*

Ejemplo:

Aplicar la regla de Cramer a la resolución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2y - 3z = 2 \\ 3x + 2y = 1 \\ x + 2y - 5z = 3 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 18 \neq 0, \qquad A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8.$$

La solución es:

$$x = \frac{2}{18}, \qquad y = \frac{6}{18}, \qquad z = -\frac{8}{18}$$

que una vez simplificada queda así:

$$x = \frac{1}{9}, \qquad y = \frac{1}{3}, \qquad z = -\frac{4}{9}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dadas las matrices

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

efectuar las siguientes operaciones, en los casos que sean posibles:

1.° $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}$.

2.° Obtener las traspuestas de $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$.

3.° Obtener las matrices inversas de $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$.

4.° Comprobar que $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{I}$.

5.° Obtener $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}$.

Solución:

1.°

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+8 & -3+4 \\ 2-4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

El producto $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ no es posible, puesto que el número de columnas de $\boldsymbol{A}$ es distinto del número de filas de $\boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2+2 & 4-1 \\ 2 & -2+6 & 4-3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.°

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.° Puesto que las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no son cuadradas, no tienen inversa.

Para hallar la inversa de $\boldsymbol{C}$ procederemos a calcular su determinante y los adjuntos de sus elementos:

$$C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{11} = 3, \quad C_{12} = -2, \quad C_{21} = -1, \quad C_{22} = 2$$

de donde:

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4.°

$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 6-2 & -2+2 \\ 6-6 & -2+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

5.°

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

El producto $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}$ no se puede efectuar, puesto que el número de columnas de $\boldsymbol{A}$ es distinto del número de filas de $\boldsymbol{C}$.

2. Dadas las matrices

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \quad \boldsymbol{B} \equiv \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

¿qué condiciones se deben verificar para que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$?

Solución:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & b & b \\ e & e & e \\ h & h & h \end{pmatrix}$$

Para que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$, tendrán que ser iguales los elementos correspondientes de ambas matrices producto, es decir:

$$b=0, \quad e=a+d+g=b+e+h=c+f+i, \quad h=0$$

o sea:

$$a+d+g=e, \quad c+f+i=e \quad \text{y} \quad b=h=0$$

3. Siendo

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

hallar una matriz $\boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ sea nula.

Solución:

Si

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde a, b, c y d son las incógnitas a determinar, se tendrá:

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a+2b & 2a+4b \\ c+2d & 2c+4d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a(a+2b)+c(2a+4b) & b(a+2b)+d(2a+4b) \\ a(c+2d)+c(2c+4d) & b(c+2d)+d(2c+4d) \end{pmatrix}$$

Ahora bien, para que la matriz producto obtenida sea nula, tendrá que tener nulos todos sus elementos. Es decir, tendrá que ser:

$$a(a+2b)+c(2a+4b)=0, \quad b(a+2b)+d(2a+4b)=0,$$
$$a(c+2d)+c(2c+4d)=0, \quad b(c+2d)+d(2c+4d)=0,$$

o, lo que es lo mismo:

$$\left\{\begin{array}{l} (a+2b)\,(a+2c)=0 \\ (a+2b)\,(b+2d)=0 \\ (a+2c)\,(c+2d)=0 \\ (b+2d)\,(c+2d)=0 \end{array}\right.$$

para lo cual basta que sea:

$$\left\{\begin{array}{l} a+2c=0 \\ b+2d=0 \end{array}\right. \Longrightarrow a=-2c, \quad b=-2d$$

La matriz pedida será, pues:

$$\boldsymbol{B}\equiv\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde c y d son parámetros arbitrarios.

Por tanto, si hacemos, por ejemplo, $c=-3$, $d=4$, tendremos:

$$\boldsymbol{B}\equiv\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Dada la matriz

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación en m y n siguiente:

$$\boldsymbol{A}^2+m\cdot\boldsymbol{A}+n\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$$

Solución:

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$$

Por tanto, la ecuación a resolver es:

$$\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2m&m\\m&2m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n&0\\0&n\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}5+2m+n&4+m\\4+m&5+2m+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 5+2m+n=0,\quad 4+m=0\Longrightarrow m=-4,\quad n=3.$$

5. Determinar dos matrices cuadradas de segundo orden $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ que verifiquen el sistema lineal:

$$2\boldsymbol{X}-5\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix},\qquad -\boldsymbol{X}+3\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left\{\begin{aligned}2\boldsymbol{X}-5\boldsymbol{Y}&=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\\-\boldsymbol{X}+3\boldsymbol{Y}&=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}\end{aligned}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{aligned}2\boldsymbol{X}-5\boldsymbol{Y}&=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\\-2\boldsymbol{X}+6\boldsymbol{Y}&=\begin{pmatrix}4&2\\6&0\end{pmatrix}\end{aligned}\right.\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&2\\6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\6&1\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}5&0\\6&1\end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación del sistema propuesto la expresión obtenida para la matriz $\boldsymbol{Y}$, se tiene:

$$-\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}15&0\\18&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}15&0\\18&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}13&-1\\15&3\end{pmatrix}.$$

6. Hallar la matriz $\boldsymbol{X}^2-\boldsymbol{Y}^2$ sabiendo que

$$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

y que

$$3\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ 3\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow 4\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{X}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejando $\boldsymbol{Y}$ en la primera ecuación del sistema de partida, se tiene:

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}-\boldsymbol{X} \Longrightarrow \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Y como, por otra parte:

$$\boldsymbol{X}^2=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}^2=\boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{Y}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

se tendrá en definitiva:

$$X^2-Y^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

7. Probar que la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

verifica la relación $A^n=3^{n-1}\cdot A$.

Solución:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=3\cdot A$$

$$A^3=A^2\cdot A=3\cdot A\cdot A=3\cdot A^2=3\cdot 3\cdot A=3^2\cdot A$$

$$A^4=A^3\cdot A=3^2\cdot A\cdot A=3^2\cdot A^2=3^2\cdot 3\cdot A=3^3\cdot A$$

y, en general:

$$A^n=3^{n-1}\cdot A$$

8. Siendo $A=\begin{pmatrix}\cos a & -\operatorname{sen} a\\ \operatorname{sen} a & \cos a\end{pmatrix}$, calcular A^p y A^{-p}.

Solución:

$$A^2=\begin{pmatrix}\cos a & -\operatorname{sen} a\\ \operatorname{sen} a & \cos a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos a & -\operatorname{sen} a\\ \operatorname{sen} a & \cos a\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 2a & -\operatorname{sen} 2a\\ \operatorname{sen} 2a & \cos 2a\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}\cos 2a & -\operatorname{sen} 2a\\ \operatorname{sen} 2a & \cos 2a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos a & -\operatorname{sen} a\\ \operatorname{sen} a & \cos a\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 3a & -\operatorname{sen} 3a\\ \operatorname{sen} 3a & \cos 3a\end{pmatrix}$$

y, en general:

$$A^p = \begin{pmatrix} \cos pa & -\operatorname{sen} pa \\ \operatorname{sen} pa & \cos pa \end{pmatrix}$$

Para hallar A^{-p} comenzaremos por hallar A^{-1}.

CÁLCULO DE A^{-1}

$$A = \begin{vmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & \cos a \end{vmatrix} = \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1, \qquad A_{11} = \cos a,$$

$$A_{12} = -\operatorname{sen} a, \qquad A_{21} = \operatorname{sen} a, \qquad A_{22} = \cos a$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{A} & \dfrac{A_{21}}{A} \\ \dfrac{A_{12}}{A} & \dfrac{A_{22}}{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ -\operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix}$$

CÁLCULO DE A^{-p}

$$A^{-2} = A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ -\operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ -\operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2a & \operatorname{sen} 2a \\ -\operatorname{sen} 2a & \cos 2a \end{pmatrix}$$

$$A^{-3} = \begin{pmatrix} \cos 2a & \operatorname{sen} 2a \\ -\operatorname{sen} 2a & \cos 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ -\operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 3a & \operatorname{sen} 3a \\ -\operatorname{sen} 3a & \cos 3a \end{pmatrix}$$

y, en general:

$$A^{-p} = \begin{pmatrix} \cos pa & \operatorname{sen} pa \\ -\operatorname{sen} pa & \cos pa \end{pmatrix}$$

9. Siendo A y B dos matrices cuadradas simétricas de orden 2, hallar la condición para que la matriz $A \cdot B$ sea también simétrica.

Solución:

Sea

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

de donde:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12} & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Para que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ sea simétrica tendrá que ser:

(1) $$a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$$

Ahora bien, si formamos el producto

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12} & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

como la condición para que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ es precisamente la misma (1), podemos concluir que la condición pedida es que sea $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.

10. Dada la matriz

$$\boldsymbol{A}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hallar $\boldsymbol{A}^n$, siendo n un número natural.

Solución:

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^4=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & n & x_n\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & n+1 & x_{n+1}\\ 0 & 1 & n+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

y como, por otra parte:

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1 & n & x_n\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & n+1 & x_n+n\\ 0 & 1 & n+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

tendrá que ser:

$$x_{n+1}=x_n+n$$

Dando valores a n, tenemos:

Para $n=0$:	$x_1=0$
» $n=1$:	$x_2=x_1+1$
» $n=2$:	$x_3=x_2+2$
» $n=3$:	$x_4=x_3+3$
... ...	... ...
... ...	... ...
	$x_n=x_{n-1}+(n-1)$

Sumando y simplificando, se tiene:

$$x_n=1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}$$

o sea:

$$x_n=\frac{n(n-1)}{2}$$

Luego:

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

11. Siendo $\boldsymbol{A}$ una matriz cualquiera, demostrar que la matriz $\boldsymbol{A}^t\cdot\boldsymbol{A}$ es simétrica.

Solución:

En virtud de (68.8):

$$(\boldsymbol{A}^t\cdot\boldsymbol{A})^t=\boldsymbol{A}^t\cdot(\boldsymbol{A}^t)^t=\boldsymbol{A}^t\cdot\boldsymbol{A}$$

luego $\boldsymbol{A}^t\cdot\boldsymbol{A}$ es igual a su traspuesta y, por tanto, es simétrica.

12. Dada la matriz $\boldsymbol{A}\equiv\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, hallar todas las matrices $\boldsymbol{X}$ que conmutan con la dada. Es decir, tales que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}$.

Solución:

La matriz $\boldsymbol{X}$ tiene que ser cuadrada y de orden 2, pues de no ser así, uno de los productos $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$, o bien $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}$, sería imposible.

Si $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, se tendrá:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-2c & b-2d\\ -3a+4c & -3b+4d\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-3b & -2a+4b\\ c-3d & -2c+4d\end{pmatrix}$$

de donde:

$$\left\{\begin{aligned} a-2c&=a-3b\\ b-2d&=-2a+4b\\ -3a+4c&=c-3d\\ -3b+4d&=-2c+4d\end{aligned}\right. \Longrightarrow c=\frac{3b}{2},\quad d=\frac{2a-3b}{2}$$

Luego:

$$\boldsymbol{X}\equiv\begin{pmatrix}a & b\\ \dfrac{3b}{2} & \dfrac{2a-3b}{2}\end{pmatrix}$$

13. Estudiar si entre las matrices siguientes existe alguna relación de dependencia y, caso de que exista, encontrar dicha relación:

$$\boldsymbol{A}\equiv\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}\equiv\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}\equiv\begin{pmatrix}5 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

Solución:

El problema se reduce a comprobar si existe un sistema de números, no todos nulos: α, β y γ, tales que:

$$(1) \qquad \alpha\cdot\boldsymbol{A}+\beta\cdot\boldsymbol{B}+\gamma\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$$

O sea:

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix} 3\alpha-2\beta+5\gamma & -\alpha+3\beta+3\gamma \\ 2\alpha-\beta+4\gamma & \alpha-2\beta-\gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$\left\{\begin{array}{l} 3\alpha-2\beta+5\gamma=0 \\ -\alpha+3\beta+3\gamma=0 \\ 2\alpha-\ \beta+4\gamma=0 \\ \alpha-2\beta-\ \gamma=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \alpha=3\lambda,\ \beta=2\lambda,\ \gamma=-\lambda$$

siendo λ un parámetro real arbitrario. Si hacemos $\lambda=1$, tendremos el sistema de números, no todos nulos: 3, 2, -1, que verifica (1); es decir, tal que:

$$(2) \qquad 3\cdot\boldsymbol{A}+2\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$$

Luego, efectivamente, entre las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ existe una relación de dependencia y ésta viene dada por (2).

14. Encontrar todas las matrices cuadradas de orden 3 que conmutan con la matriz

$$\boldsymbol{A}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Sea

$$\boldsymbol{X}\equiv\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

la matriz que conmuta con la dada, es decir, tal que:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}$$

El problema queda reducido, por tanto, a resolver la anterior ecuación matricial, para lo cual comenzaremos por calcular:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ 3x_{11}+x_{21}+2x_{31} & 3x_{12}+x_{22}+2x_{32} & 3x_{13}+x_{23}+2x_{33}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}x_{11}+3x_{13} & x_{12}+x_{13} & 2x_{13}\\ x_{21}+3x_{23} & x_{22}+x_{23} & 2x_{23}\\ x_{31}+3x_{33} & x_{32}+x_{33} & 2x_{33}\end{pmatrix}$$

de donde:

$$x_{11}=x_{11}+3x_{13};\quad x_{12}=x_{12}+x_{13};\quad x_{13}=2x_{13}$$
$$x_{21}=x_{21}+3x_{23};\quad x_{22}=x_{22}+x_{23};\quad x_{23}=2x_{23}$$
$$3x_{11}+x_{21}+2x_{31}=x_{31}+3x_{33};\quad 3x_{12}+x_{22}+2x_{32}=x_{32}+x_{33};$$
$$3x_{13}+x_{23}+2x_{33}=2x_{33}$$

Simplificando:

$$\left\{\begin{aligned} x_{13}&=0\\ x_{23}&=0\\ 3x_{11}+x_{21}+x_{31}&=3x_{33}\\ 3x_{12}+x_{22}+x_{32}&=x_{33}\end{aligned}\right.$$

Si hacemos $x_{11}=a$, $x_{12}=b$, $x_{21}=c$, $x_{22}=d$, $x_{33}=e$, se tiene:

$$\left\{\begin{aligned} &3a+c+x_{31}=3e\\ &3b+d+x_{32}=e\end{aligned}\right.$$

de donde:

$$x_{31}=3e-3a-c, \quad x_{32}=e-3b-d$$

Luego la matriz pedida es:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 3e-3a-c & e-3b-d & e \end{pmatrix}$$

donde a, b, c, d y e son parámetros reales cualesquiera.

15. Demostrar que:

$$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$$

Solución:

$$A\cdot A^{-1}=I \Longrightarrow (A\cdot A^{-1})^t=I^t \Longrightarrow (A^{-1})^t\cdot A^t=I$$

Postmultiplicando por $(A^t)^{-1}$, se tiene:

$$(A^{-1})^t\cdot A^t\cdot(A^t)^{-1}=I\cdot(A^t)^{-1} \Longrightarrow (A^{-1})^t\cdot I=(A^t)^{-1} \Longrightarrow (A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver la ecuación:

$$\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\boldsymbol{X}\equiv\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices

$$\boldsymbol{A}\equiv(4 \quad 3 \quad 1 \quad 2) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{B}\equiv\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

calcular $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.

Solución:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(21); \qquad \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 & 6 \\ -4 & -3 & -1 & -2 \\ 24 & 18 & 6 & 12 \\ 12 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Calcular la inversa de la matriz

$$\boldsymbol{A}\equiv\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\equiv\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Calcular, caso de ser posible, los productos siguientes:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 \\ 5 & -3 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 8 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 2 \quad 3)$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

f) $(1 \quad 2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; *h)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; *j)* $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 29 & -30 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 9 \\ 6 & -3 & 3 \\ 8 & -22 & -26 \end{pmatrix}$;

c) No es posible;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; *e)* $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$;

f) (32);

g) $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -11 & 12 \end{pmatrix}$; *h)* $\begin{pmatrix} 10 & -11 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 21 & 16 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; *j)* No es posible.

5. Hallar la inversa, caso de ser posible, de cada una de las matrices siguientes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$; *d)* $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; *f)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; *h)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; *j)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; *l)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; *n)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3/2 & 0 & -1/2 \\ -5/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} -11/6 & 1/2 & 1/3 \\ 4/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} {}^2/_7 & -{}^3/_{14} \\ -{}^1/_7 & {}^5/_{14} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} {}^{13}/_6 & {}^3/_2 & -{}^7/_6 \\ {}^1/_6 & {}^1/_2 & -{}^1/_6 \\ -{}^1/_2 & -{}^1/_2 & {}^1/_2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} {}^2/_3 & -{}^5/_3 & {}^1/_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

g) No tiene inversa;

h) $\begin{pmatrix} {}^1/_3 & -{}^1/_3 & {}^1/_3 \\ -{}^2/_3 & {}^2/_3 & {}^1/_3 \\ {}^1/_3 & {}^1/_6 & -{}^1/_6 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; k) $\dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

l) $\dfrac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$;

m) $\dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 11 & 7 & -26 \\ -1 & -7 & -3 & 16 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

n) $\dfrac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 16 & -6 & 4 \\ 22 & 41 & -30 & -1 \\ -10 & -44 & 30 & -2 \\ 4 & -13 & 6 & -1 \end{pmatrix}$;

6. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} \equiv \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

hallar: *a)* $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$; *b)* $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$; *c)* $2\cdot\boldsymbol{A}$; *d)* $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$; *e)* $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$; *f)* $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$; *g)* $\boldsymbol{A}^2$.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; *d)* $\begin{pmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 4 & 13 & 15 \\ 6 & 14 & 20 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -26 & 24 & -6 \end{pmatrix}$; *f)* $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 4 & 11 & 3 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

7. Calcular $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$, siendo

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Resolver la ecuación matricial:

$$(x_1\ x_2\ x_3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=(1\quad -2\quad 3).$$

Solución:

$$x_1=5, \quad x_2=5, \quad x_3=-2.$$

9. Escribir en forma matricial los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 4x-2y=4 \\ 3x+5y=2 \\ x-y=7 \end{cases}$; *b)* $\begin{cases} 2x-y+4z-t=1 \\ x+5y-z+3t=-2 \\ 5x+2y-6z+t=4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x+3y-6z=0 \\ 5x+y+4z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$; *d)* $\begin{cases} 1+5x+6y-2z+t=0 \\ 3-2x+y+4z+5t=0 \\ 6+3x+2y-z+7t=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2+3x-y=x' \\ 1+4x+2y=y' \\ 5-x+6y=z' \end{cases}$.

Solución:

a) $(x \;\; y)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}=(4 \;\; 2 \;\; 7);$

b) $(x \;\; y \;\; z \;\; t)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & -6 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=(1 \;\; -2 \;\; 4);$

c) $(x \;\; y \;\; z)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}=(0 \;\; 0 \;\; 0);$

d) $(1 \;\; x \;\; y \;\; z \;\; t)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}=(0 \;\; 0 \;\; 0);$

e) $(1 \;\; x \;\; y)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}=(x' \;\; y' \;\; z').$

10. Siendo

$$\boldsymbol{A}\equiv\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B}\equiv\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a \\ -1 & a & b \end{pmatrix}$$

probar que $\boldsymbol{A}^t=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}$.

11. Resolver la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & x & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 11 & y & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$x=1, \qquad y=4.$$

12. Siendo

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4X - 3Y = A \\ 2X - Y = B \end{cases}$$

Solución:

$$X \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hallar A^n, siendo n un número natural.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{pmatrix}$$

calcular:

1.° $B = A^n$. 2.° B^t. 3.° B^{-1}, siendo $x \neq 0$.

Solución:

1.° $$A^n = 2^{n-1}\cdot\begin{pmatrix} 1+x^n & 1-x^n \\ 1-x^n & 1+x^n \end{pmatrix}$$

2.° $$B^t = 2^{n-1}\cdot\begin{pmatrix} 1+x^n & 1-x^n \\ 1-x^n & 1+x^n \end{pmatrix}$$

3.° $$B^{-1} = \frac{1}{4\cdot x^n}\begin{pmatrix} 1+x^n & x^n-1 \\ x^n-1 & 1+x^n \end{pmatrix}$$

15. Dada la matriz

$$A \equiv \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

hallar A^n, siendo n un número natural.

Solución:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2-2^n \end{pmatrix}$$

16. Hallar la inversa de la matriz producto $M(x)\cdot N(y)$, siendo:

$$M(x) \equiv \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$N(y) \equiv \begin{pmatrix} \cos y & 0 & \operatorname{sen} y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} y & 0 & \cos y \end{pmatrix}.$$

Comprobar, además, que se llega al mismo resultado efectuando el producto $N(-y)\cdot M(-x)$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} \cos x \cos y & \operatorname{sen} x \cos y & -\operatorname{sen} y \\ -\operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ \cos x \operatorname{sen} y & \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y & \cos y \end{pmatrix}$$

17. Encuéntrese la matriz M que multiplicando por la derecha a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

nos dé la matriz unidad.

Solución:

$$M = \begin{pmatrix} 4m+7 & 4n-3 & 4p-3 \\ m-1 & n+1 & p \\ m & n & p \\ -3m-1 & -3n & -3p+1 \end{pmatrix}$$

donde m, n y p son parámetros indeterminados.

18. Demuéstrese que si dos matrices cuadradas son simétricas, entonces la matriz producto es simétrica si, y sólo si, ambas matrices conmutan.

19. Hallar la potencia enésima de

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

20. Hallar a y b de modo que sean números naturales y que el determinante de la matriz producto de

$$\begin{pmatrix} a^2 & 1 & 3 \\ b^2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

sea igual a 1000.

Solución:

$a=50,\ b=49;\qquad a=18,\ b=15;\qquad a=10,\ b=1.$

21. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{N} \end{cases}$$

siendo $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{N}$ matrices cuadradas dadas de igual orden, y $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ las matrices incógnitas.

Se supondrá que son no-singulares todas las matrices necesarias.

Solución:

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}^{-1}\cdot\boldsymbol{C})^{-1}\cdot(\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D}^{-1}\cdot\boldsymbol{N})$$
$$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{D})^{-1}\cdot(\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{M}-\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{N}).$$

22. Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada no-singular, que verifica la ecuación:

$$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0},$$

demostrar que admite matriz inversa y expresar ésta en función de $\boldsymbol{A}$ y de $\boldsymbol{I}$.

Solución:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = -(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}).$$

23. Probar que todas las matrices que conmutan con la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son del tipo $m \cdot \boldsymbol{A} + n \cdot \boldsymbol{I}$.

24. Demostrar que toda matriz ortogonal directa de orden 2 se puede poner en la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

y que toda matriz ortogonal inversa de orden 2 se puede escribir de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

bibliografía

OBRAS DE MATEMATICAS

ABELLANAS, Pedro: *Elementos de Matemáticas.* Volúmenes I y II. Madrid, 1965.

AGUDO SORNI, Gustavo: *Algebra Lineal.* Tomos I y II. Madrid, 1965.

AITKEN, A. C.: *Determinantes y Matrices.* Editorial Dossat. Madrid.

APÓSTOL, Tom M.: *Análisis Matemático.* Editorial Reverté. Barcelona, 1960.

AYRES, Frank: *Teory and Problems of Modern Algebra.* Schauman Publishing. Nueva York, 1965.

BOURBAKI: *Elements de Mathématique, Théorie des Ensembles.* Herman. París VI.

BELLMAN, R.: *Introducción al Análisis Matricial.* Editorial Reverté. Barcelona, 1965.

BIRKHOFF, GARRET y MAC LANE SAUNDERS: *Algebra Moderna.* Editorial Teide. Barcelona, 1960.

BREARD, C.: *Mathématiques Elementaires.* Tomo I. Editions de L'École. París VI.

BURGOS, Alfonso: *Matemáticas Generales.* Volúmenes I y II. Madrid, 1967.

CANSADO, Enrique: *Sobre la Inversión de Matrices de Leontief.* Editorial Universitaria. Santiago de Chile, 1962.

COTLAR, MISCHA y RATTO, Cora: *Introducción al Algebra Lineal.* Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1962.

COURANT y ROBBINS: *¿Qué es la Matemática?* Editorial Aguilar. Madrid, 1968.

DENIS-PAPIN y KAUFMANN, A.: *Cours de Calcul Matriciel Apliqué.* Ediciones Albin Michel. París, 1964.

DIEUDONNÉ, J.: *Fundamentos de Análisis Moderno.* Editorial Reverté. Barcelona, 1966.

DUBRIEL, P., y DUBRIEL, Jacotin: *Lecciones de Algebra Moderna.* Editorial Reverté. Barcelona, 1965.

FADEVA, N. V.: *Métodos de Cálculo de Algebra Lineal.* Paraninfo. Madrid, 1967.

GALLEGO DÍAZ, J.: *Curso General de Matemáticas.* Volumen I. Publicaciones de la Universidad del Zulia. Maracaibo, 1963.

GARCÍA CAMARERO, Ernesto: *Algebra Lineal.* Madrid, 1967.

CARNIER, H. G.: *Teoría de Funciones.* Tomo I. Ediciones Técnicas Marcombo. Barcelona, 1966.

GODEMENT, Roger: *Algebra.* Editorial Tecnos. Madrid, 1967.

HALMOS, Paul R.: *Teoría Intuitiva de los Conjuntos.* Compañía Editorial Continental. Méjico, 1965.

HALMOS, Paul R.: *Espacios Vectoriales Finito-Dimensionales.* Compañía Editorial Continental. Méjico, 1965.

KAZIMIERZ, Kuratowski: *Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Topología.* Editorial Vicens-Vives. Barcelona, 1966.

KEMENY, John G., LAURIE SNELL, J., y THOMPSON, Geral L.: *Introducción a las Matemáticas Finitas.* Compañía Editorial Continental. Méjico, 1962.

LEFORT, G.: *Algébre et Analyse.* Exercices. Dunod. París, 1964.

LENTIN y RIVAUD: *Algebra Moderna.* Editorial Aguilar. Madrid, 1965.

MATA CORTÉS, H.: *Algebra Matricial.* Editorial Dossat. Madrid, 1966.

MESCHKOWSKI, Herbert: *Introducción a la Matemática Moderna.* Selecciones Científicas. Madrid, 1967.

MONJALON, A.: *Calcul Matriciel.* Librairie Vuibert. París, 1963.

PAIGE, Lowel J., y DEAN SWIFT, J.: *Elements of Linear Algebra.* Blaisdell Publishing Company. Nueva York, 1965.

PISOT y ZAMANSKY: *Mathématiques Generales.* Dunod. París, 1963.

SCHWARTZ, Jacobo T.: *Introducción al Estudio de Matrices y Vectores.* Ediciones del Castillo. Madrid, 1966.

VANCE, E. P.: *Algebra y Trigonometría Modernas.* Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts-Londres, 1964.

VIDAL ABASCAL: *La Nueva Matemática.* Editorial Dossat. Madrid, 1961.

YAMANE TARO: *Matemáticas para Economistas.* Ediciones Ariel. Barcelona, 1965.

ZAMANSKY, Marc: *Introducción al Algebra y Análisis Moderno.* Barcelona, 1967.

LIBROS DE PROBLEMAS

CLADERA, Jaime: *Problemas de Algebra Lineal.* Edix. Madrid, 1967.

DENIS-PAPIN, M.: *Exercices de Cálcul Booléien avec leurs Solutions.* Eyrolles Editeurs. París, 1966.

GALLEGO DÍAZ, José: *Nuevos Problemas de Matemáticas.* Editorial Norte y Sur. Madrid, 1965.

LUZARRAGA, Alberto: *Problemas Resueltos de Algebra Lineal.* Barcelona, 1967.

R. A. E. C.: *Problemas de Algebra Lineal.* Madrid, 1967.

OBRAS DE LOGICA

BURGOS, Alfonso: *Iniciación a la Lógica Matemática.* Selecciones Científicas. Madrid, 1970.

HILBER, D., y ACKERMANN, W.: *Elementos de Lógica Teórica.* Editorial Tecnos. Madrid, 1962.

QUINE, Willard: *Los Métodos de la Lógica.* Ediciones Ariel. Barcelona, 1962.

SACRISTÁN, Manuel: *Introducción a la Lógica y al Análisis Formal.* Ediciones Ariel. Barcelona, 1964.

SUPPES, Patrick: *Introducción a la Lógica Simbólica.* Compañía Editorial Continental. Méjico, 1966.

índice

PÁGS.

1. CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

1. Introducción ... 13
2. Determinación de un conjunto ... 14
3. Conjuntos iguales ... 16
4. Inclusión ... 17
5. Conjunto universal ... 20
6. Conjunto de las partes ... 22
7. Conjuntos disyuntos ... 23
8. Partición ... 25
9. Diagramas de Venn ... 26

Ejercicios resueltos ... 27
Ejercicios propuestos ... 31

2. OPERACIONES CON CONJUNTOS

10. Intersección ... 34
11. Reunión ... 40
12. Complementación ... 50
13. Ley de dualidad ... 55
14. Algebra de conjuntos ... 57
15. Diferencia ... 58
16. Suma booleana ... 63
17. Número de elementos de un conjunto finito ... 68
18. Los cuantificadores ... 71

Ejercicios resueltos ... 79
Ejercicios propuestos ... 100

PÁGS.

3. RELACIONES BINARIAS

19. Pares ... 104
20. Producto cartesiano de dos conjuntos ... 105
21. Diagramas de los productos cartesianos de conjuntos ... 111
22. Relaciones binarias ... 117
23. Propiedades de las relaciones binarias ... 124
24. Relaciones de equivalencia ... 126
25. Clase de equivalencia ... 128
26. Conjunto cociente ... 131
27. Las relaciones de equivalencia como generadoras de entes abstractos ... 133
28. Relaciones de orden ... 134
29. Diagramas de Hasse ... 135
30. Cotas de un conjunto totalmente ordenado ... 137

Ejercicios resueltos ... 141
Ejercicios propuestos ... 149

4. APLICACIONES

31. Aplicaciones ... 154
32. Aplicaciones inversas ... 164
33. Producto de aplicaciones ... 167
34. Cardinal de un conjunto ... 171
35. Conjuntos numerables ... 173

Ejercicios resueltos ... 178
Ejercicios propuestos ... 188

5. LEYES DE COMPOSICION

36. Introducción ... 193
37. Operaciones ... 193
38. Leyes de composición de las operaciones binarias ... 194
39. Leyes de composición de las operaciones unitarias ... 195
40. Clasificación de las leyes de composición ... 196
41. Propiedades de las leyes de composición interna ... 202
42. Elemento regular ... 204

PÁGS.

43. Elemento neutro ... 205
44. Elementos simétricos ... 207
45. Propiedad distributiva ... 209
46. Propiedades de las leyes de composición externa ... 211
Ejercicios resueltos ... 213
Ejercicios propuestos ... 222

6. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

47. Introducción ... 227
48. Isomorfismo ... 228
49. Algebra de las partes del conjunto universal ... 233
50. Estructura de grupo ... 234
51. Estructura de anillo ... 236
52. Anillo de integridad ... 239
53. Estructura de cuerpo ... 240
54. Estructura de espacio vectorial ... 242
55. Espacio vectorial de sucesiones finitas ... 246
56. Espacio vectorial de matrices unicolumnas ... 253
57. Producto de espacios vectoriales ... 254
58. Dependencia e independencia lineal ... 257
59. Bases de un espacio vectorial ... 259
Ejercicios resueltos ... 261
Ejercicios propuestos ... 275

7. ALGEBRA MATRICIAL

60. Matrices ... 281
61. Partición de matrices ... 285
62. Matrices especiales ... 287
63. Cálculo matricial ... 290
64. Igualdad de matrices ... 291
65. Suma ... 291
66. Multiplicación por un escalar ... 293
67. Producto de matrices ... 295
68. Propiedades de la multiplicación ... 298
69. Anillo de las matrices cuadradas ... 299

PÁGS.

70. Inversión de una matriz cuadrada 300
71. División de matrices 303
72. Matrices ortogonales 303
73. Regla de Cramer 305
Ejercicios resueltos 309
Ejercicios propuestos 323

BIBLIOGRAFÍA 333

www.freelibros.org

www.freelibros.org